УДК 519.71 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ КОНЕЧНО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ МИНИМАКСНЫХ НЕЧЕТКИХ АВТОМАТОВ*

А. Ю. Пономарева, М. К. Чирков

С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе теоретически обоснован и детально разработан специальный метод минимизации числа состояний и построения минимальных форм обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата, основанный на доказанной ранее теореме о связи максиминных и минимаксных произведений нечетких матриц и разработанной методике матричной оптимизации конечно-нестационарного максиминного нечеткого автомата. Доказано, что от заданного обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата можно перейти к максиминному нечеткому автомату того же типа, являющемуся дополнением для исходного минимаксного автомата. Также доказано, что если заданные обобщенные конечно-нестационарные минимаксный и максиминный нечеткие автоматы являются дополнениями друг друга, то их минимальные формы имеют одно и тоже число состояний, что позволяет сначала перейти от обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата к обобщенному конечно-нестационарному максиминному нечеткому автомату, затем минимизировать известным методом преобразующих матриц полученный обобщенный конечно-нестационарный максиминный нечеткий автомат и, перейдя обратно к его дополнению, получить минимальную форму исходного обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата. В результате разработаны процедура и соответствующий ей алгоритм минимизации числа состояний и построения минимальной формы обобщенного конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата. В заключение дан пример применения предложенного специального метода минимизации к заданному обобщенному минимаксному конечно-нестационарному нечеткому автомату. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: обобщенный конечно-нестационарный минимаксный («оптимистический») нечеткий автомат, обобщенный конечно-нестационарный максиминный («пессимистический») нечеткий автомат, дополнение конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата, минимальная форма конечно-нестационарного минимаксного нечеткого автомата.

1. Введение. В работе [1] был предложен один метод оптимизации стационарного обобщенного минимаксного (иначе «оптимистического») нечеткого автомата, определенного в работах [2–4]. Кроме того, в работах [5, 6] решена проблема оптимизации абстрактной структуры обобщенного (имеющего выходной алфавит) конечно-нестационарного нечеткого максиминного (иначе «пессимистического») автомата, разработаны теоретически обоснованные алгоритмы минимизации такого автомата по числу состояний, основанные на построении семейств специальных преобразующих матриц. Поскольку в работе [4] установлена связь между обобщенными стационарными автоматами обоих видов — «пессимистическим» и «оптимистическим», основная цель данной работы состоит в установлении подобной связи между обобщенными конечно-нестационарными «оптимистическим» и «пессимистическим» автоматами и разработке метода оптимизации конечно-нестационарного «оптимистического» автомата, опираясь на результаты работ [4–6].

2. Нечеткие множества. Обозначим символом $\mathcal{L}$ полную дистрибутивную решетку

$$\mathcal{L} = ([0,1],\ \max,\ \min,\ \geqslant),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00538).

т. е. замкнутый интервал $[0,1]$ с операциями (где $a,b\in[0,1]$)

$$a+b=\max(a,b),\qquad ab=\min(a,b), \tag{1}$$

условно называемыми «сложением» и «умножением», и обычным упорядочиванием. В дальнейшем в данной работе условимся использовать знаки, обозначающие «сложение» и «умножение», только для записи (max-min)-операций (1), а символ $\mathcal{L}$ также для обозначения интервала [0,1]. В отличие от четкого множества, нечеткое множество Z над универсальным множеством U определяется как множество упорядоченных пар $Z=\{z,\mu_Z(z)\}$, где $\mu_Z(z)\in[0,1]$ для всех $z\in U$. Функция $\mu_Z(z)$ в этом случае называется *характеристической функцией степени принадлежности* (или просто *функцией степени принадлежности*) элемента z нечеткому множеству Z. В частном случае при $\mu_Z(z)\in\{0,1\}$ для всех $z\in U$ нечеткое множество Z будет обычным четким множеством над универсальным множеством U. Будем также обозначать через $\mathcal{L}^{m,n}$ множество всех $(m\times n)$-матриц над $\mathcal{L}$ и называть матрицы из $\mathcal{L}^{m,n}$ *нечеткими.*

3. Операции над нечеткими множествами и матрицами. Если Z_1 и Z_2 суть нечеткие множества над U, то их *объединением* называют [7] нечеткое множество $Z=Z_1\cup Z_2$ с функцией принадлежности $\mu_Z(z)=\mu_{Z_1\cup Z_2}(z)=\max\left[\mu_{Z_1}(z),\ \mu_{Z_2}(z)\right]$, $z\in U$. *Пересечением* Z_1 и Z_2 называют нечеткое множество $Z=Z_1\cap Z_2$ с функцией принадлежности $\mu_Z(z)=\mu_{Z_1\cap Z_2}(z)=\min\left[\mu_{Z_1}(z),\mu_{Z_2}(z)\right]$, $z\in U$. *Дополнением нечеткого множества* Z называют нечеткое множество $\overline{Z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\overline{Z}}(z)=1-\mu_Z(z),\ z\in U$.

Дополнением нечеткой матрицы $\mathbf{R}=(\mu_R(a_i,a_j))_{m,n}\in\mathcal{L}^{m,n}$ называют нечеткую матрицу $\overline{\mathbf{R}}\in\mathcal{L}^{m,n}$ с элементами

$$\mu_{\overline{\mathbf{R}}}(a_i,a_j)=1-\mu_{\mathbf{R}}(a_i,a_j). \tag{2}$$

Максиминное произведение нечетких матриц $\mathbf{R}^{(1)}\in\mathcal{L}^{m,n}$ и $\mathbf{R}^{(2)}\in\mathcal{L}^{n,k}$ определяется как нечеткая матрица $\mathbf{R}=\mathbf{R}^{(1)}\circ\mathbf{R}^{(2)}\in\mathcal{L}^{m,k}$ с элементами

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i,a_j)=\mu_{\mathbf{R}^{(1)}\circ\mathbf{R}^{(2)}}(a_i,a_j)=\max_g\min\left[\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i,a_g),\mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_g,a_j)\right]. \tag{3}$$

Минимаксное произведение нечетких матриц $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ определяется как нечеткая матрица $\mathbf{R}=\mathbf{R}^{(1)}*\mathbf{R}^{(2)}$ с элементами

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i,a_j)=\mu_{\mathbf{R}^{(1)}*\mathbf{R}^{(2)}}(a_i,a_j)=\min_g\max\left[\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i,a_g),\mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_g,a_j)\right]. \tag{4}$$

4. Типы конечно-нестационарных нечетких автоматов. Пусть X, A, Y — алфавиты соответственно входных символов, состояний и выходных символов. Будем называть *нечеткой элементарной автоматной структурой*, заданной над $\mathcal{L}$, систему

$$\mathcal{A}_{ij}^{\oplus}=\left\langle X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ Y^{(i,j)},\ \{\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s,l)\}\right\rangle, \tag{5}$$

где символ $\oplus$ обозначает один из символов $\circ$ или $*$, определяющих типы произведения матриц (3) и (4) соответственно, $X^{(i,j)}\subseteq X$, $A_i,A_j\subseteq A$, $|A_i|=m_i$, $|A_j|=m_j$, $Y^{(i,j)}\subseteq Y$, а $\{\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s,l)\}$ есть совокупность нечетких *матриц переходов* из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j, где $\mathbf{F}_A^{(i,j)}(s,l)\in\mathcal{L}^{m_i,m_j}$ есть матрица, соответствующая паре (x_s,y_l), $x_s\in X^{(i,j)}$, $y_l\in Y^{(i,j)}$.

Пусть задано конечное упорядоченное множество элементарных автоматных структур $\mathcal{A}^{\oplus}$ вида (5) и Q_A — конечное упорядоченное множество финальных распределений степеней принадлежности (вектор-столбцов с элементами из $\mathcal{L}$) состояний множеству конечных состояний в алфавитах $A_j \subseteq A$. *Обобщенным нечетким конечно-нестационарным автоматом* назовем систему

$$\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus} = \langle X,\ \mathcal{A}^{\oplus},\ Y,\ \mathbf{r}_A,\ \mathcal{G}_A(G, C, c_0, f_A, \varphi_A),\ Q_A\rangle, \tag{6}$$

где $\mathcal{G}_A$ — *структурный граф автомата* (конечный, ориентированный, нагруженный граф), имеющий:

— конечное множество вершин $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}\}$, каждой вершине c_i, $i = \overline{0, d-1}$, сопоставлен алфавит состояний A_i, $i = \overline{0, d-1}$, $\bigcup_i A_i = A$, $|A_i| = m_i$;

— *начальную вершину* c_0, для которой задано $\mathbf{r}_A$ — начальное распределение степеней принадлежности состояний из A_0 множеству начальных состояний;

— конечное множество G направленных ребер, $g_{ij} \in G$ — ребро, соединяющее вершины c_i и c_j;

— однозначную функцию $f_A : G \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus}$, $f(g_{ij}) = \mathcal{A}_{ij}^{\oplus}$, $\mathcal{A}_{ij}^{\oplus} \in \mathcal{A}^{\oplus}$, причем

$$\bigcup_{g_{ij}\in G} X^{(i,j)} = X, \qquad \bigcup_{g_{ij}\in G} Y^{(i,j)} = Y;$$

— однозначную функцию $\varphi_A : C \longrightarrow Q_A$, $\varphi_A(c_i) = \mathbf{q}_A^{(i)}$, $i = \overline{0, d-1}$.

Пусть задан нечеткий конечно-нестационарный автомат (6). Выделим в структурном графе какую-либо вершину $c_j \in C$. Пусть $\varphi_A(c_j) = \mathbf{q}_A^{(j)}$. Рассмотрим один из путей $\Omega_{0j}^{(t)}$ длины t, ведущий из начальной вершины c_0 в вершину c_j графа, и выпишем последовательность элементарных автоматных структур, отмечающих ребра, образующие этот путь: $\mathcal{A}_{i_0 i_1}^{\oplus}, \mathcal{A}_{i_1 i_2}^{\oplus}, \ldots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}^{\oplus}$. Рассмотрим любую пару слов (w, v), $w = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$, $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $v = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_t}$, $y_{l_\nu} \in Y^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $\nu = \overline{1, t}$, одной длины t в алфавитах X и Y. Множество всех пар таких слов назовем *множеством допустимых пар слов для пути* $\Omega_{0j}^{(t)}$ и обозначим $Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)})$, при этом будем считать, что пустые слова $(e, e) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{00})$. *Весом отображения* слова w в слово v, порождаемого путем $\Omega_{0j}^{(t)}$ структурного графа $\mathcal{G}_A$ автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ при заданном $\mathbf{r}_A$, назовем величину

$$\Phi_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}(w, v) = \mathbf{r}_A \oplus \prod_{\nu=1}^{t}{}^{\oplus}\, \mathbf{F}_A^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \oplus \mathbf{q}_A^{(j)}, \tag{7}$$

где знак $\prod^{\oplus}$ обозначает произведение нечетких матриц одного из двух типов (3), (4), определенных в п. 3, $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)}), |w| = |v| > 0$. Если же $|w| = |v| = 0$, то $\Phi_0^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}(e, e) = \mathbf{r}_A \oplus \mathbf{q}_A^{(0)}$. Обозначим символом $\widetilde{\Omega}_{0j}$ множество всех путей в структурном графе автомата, ведущих из начальной вершины c_0 в вершину $c_j \in C$, и символом $\widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)}$ — множество всех таких путей, имеющих длину t, и введем обозначение

$$Z_{\text{доп}}(\widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)}) = \bigcup_{\Omega_{0j}^{(t)} \in \widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)}} Z_{\text{доп}}(\Omega_{0j}^{(t)}).$$

Нечетким отображением, индуцируемым вершиной c_j структурного графа автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ при заданном $\mathbf{r}_A$, назовем отображение $\widetilde{\Phi}_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})} : Z_{\text{доп}}(\widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)}) \longrightarrow \mathcal{L}$, определяемое выражением

$$\widetilde{\Phi}_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}(w,v) = \begin{cases} \max_{\Omega_{0j}^{(t)} \in \widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)}} \Phi_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}(w,v) & \text{при} \quad \widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{при} \quad \widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)} = \varnothing, \end{cases} \tag{8}$$

где $|w| = |v| = t$, $t = 0, 1, \ldots$, и $\varnothing$ — пустое множество. Будем говорить, что нечеткое отображение $\widetilde{\Phi}_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}$ является *нулевым отображением*, если для всех пар слов $(w,v) \in Z_{\text{ДОП}}(\widetilde{\Omega}_{0j}^{(t)})$ выполнено $\widetilde{\Phi}_j^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}(w,v) = 0$. В целом автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ будет индуцировать *спектр взаимосвязанных нечетких отображений*

$$\widetilde{\Phi}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})} = \left\{ \widetilde{\Phi}_0^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}, \widetilde{\Phi}_1^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}, \ldots, \widetilde{\Phi}_{d-1}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})} \right\},$$

соответствующих различным вершинам $c_j \in C$, $j = \overline{0, d-1}$, его структурного графа. При этом нулевые отображения в спектре $\widetilde{\Phi}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus})}$ можно не учитывать. В зависимости от того, какой тип произведения матриц используется в выражении (7), т. е. какой из знаков $\circ, *$ должен подразумеваться под символом $\oplus$, можно определить следующие два различных типа обобщенных конечно-нестационарных нечетких автоматов $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ (6):

— *максиминные* (иначе, *«пессимистические»*) обобщенные конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$;

— *минимаксные* (иначе, *«оптимистические»*) обобщенные конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{*}$.

5. Формулировка задачи. Пусть заданы два нечетких конечно-нестационарных автомата, имеющих одинаковый входной X и выходной Y алфавиты, одно и то же множество ребер G, одинаковые множества вершин C и одну и ту же начальную вершину c_0 структурного графа, — автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ (6) и автомат

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus} = \langle X,\ \mathcal{B}^{\oplus},\ Y,\ \mathbf{r}_B,\ \mathcal{G}_B(G, C, c_0, f_B, \varphi_B),\ Q_B \rangle, \tag{9}$$

индуцирующий при заданном $\mathbf{r}_B$ спектр взаимосвязанных отображений $\widetilde{\Phi}^{(\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus})}$. Будем называть автоматы (6) и (9) *эквивалентными*, если они индуцируют одни и те же спектры взаимосвязанных автоматных отображений, обозначим это $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus} \approx \widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus}$.

Будем говорить, что автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ (6) находится в *минимальной форме*, если не существует такого эквивалентного ему автомата $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus}$ (9) того же типа, у которого найдется хоть одна вершина $c_i \in C$, такая что $|A_i| < |B_i|$. *Минимальной формой* нечеткого конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ (6) назовем любой эквивалентный ему автомат $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus}$ (9) того же типа, находящийся в минимальной форме (обозначим $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus} = \min \widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$).

В соответствии с введенными определениями может быть сформулирована следующая задача: задан обобщенный нечеткий конечно-нестационарный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$ (6) и требуется построить его минимальную форму — автомат того же типа $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\oplus} = \min \widetilde{\mathcal{A}}_f^{\oplus}$.

Данная задача решена в работах [5] и [6] путем последовательного применения преобразований с помощью специальных матриц для случая «пессимистических» автоматов $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$. Основная цель данной работы — разработка и обоснование методов минимизации «оптимистических» конечно-нестационарных нечетких автоматов $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{*}$.

6. Связь между автоматами. В работе [4] доказано следующее утверждение относительно произведений нечетких матриц переходов стационарных нечетких обобщенных автоматов $\mathcal{A}_f^\circ$, $\mathcal{B}_f^*$, которые являются частным случаем конечно-нестационарных нечетких автоматов.

Теорема 1. *Пусть* (w,v), $w = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_d}$, $v = y_{l_1}y_{l_2}\ldots y_{l_d}$, *есть любая пара слов длины* $d > 0$ *в алфавитах* X, Y, *а для стационарных обобщенных нечетких автоматов* $\mathcal{A}_f^\circ$, $\mathcal{B}_f^*$ *выполнено* $|A| = |B| = m$, $\mathbf{F}_A(x_s,y_l) = \mathbf{F}_B(x_s,y_l) = \mathbf{F}(x_s,y_l) \in \mathcal{L}^{m,m}$ *для всех* $x_s \in X$, $y_l \in Y$. *Тогда, если*

$$\mathbf{F}^\circ(w,v) = \prod_{t=1}^{d}{}^{\circ}\mathbf{F}(x_{s_t},y_{l_t}), \qquad \mathbf{F}^*(w,v) = \prod_{t=1}^{d}{}^{*}\mathbf{F}(x_{s_t},y_{l_t})$$

суть, соответственно, максиминное и минимаксное произведения нечетких матриц переходов, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{F}^\circ(w,v) = \overline{\prod_{t=1}^{d}{}^{*}\overline{\mathbf{F}}(x_{s_t},y_{l_t})}, \qquad \mathbf{F}^*(w,v) = \overline{\prod_{t=1}^{d}{}^{\circ}\overline{\mathbf{F}}(x_{s_t},y_{l_t})},$$

где согласно (2) $\overline{\mathbf{F}}(x_{s_t},y_{l_t}) = (1 - F_{ij}(x_{s_t},y_{l_t}))_{m,m}$.

Введем следующее определение. Условимся говорить, что $\overline{\widetilde{\Phi}}_i^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}$ есть *дополнение нечеткого отображения автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$ *в вершине* c_i, $i \in \{0, d-1\}$, если для любых $(w,v) \in Z_{\text{ДОП}}(\widetilde{\Omega}_{0i})$, $|w| = |v|$, $\overline{\widetilde{\Phi}}_i^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w,v) = 1 - \widetilde{\Phi}_i^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}(w,v)$. Будем называть нечеткий конечно-нестационарный автомат $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}}_f^\oplus$ *дополнением нечеткого конечно-нестационарного автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus$, если он индуцирует спектр взаимосвязанных нечетких отображений

$$\overline{\widetilde{\Phi}}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)} = \left\{ \overline{\widetilde{\Phi}}_0^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)},\ \overline{\widetilde{\Phi}}_1^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)}, \ldots, \overline{\widetilde{\Phi}}_{d-1}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^\oplus)} \right\}.$$

В таком случае оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть заданы два конечно-нестационарных обобщенных нечетких автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}_f^\circ$ *(6) и* $\widetilde{\mathcal{B}}_f^*$ *(9), для которых выполнено следующее:*

1) $\mathbf{r}_A = \overline{\mathbf{r}}_B$, $|A_i| = |B_i|$, *для всех* $c_i \in C$;

2) если для каждой вершины $c_i \in C$ *выполняется* $\varphi_A(c_i) = \mathbf{q}_A^{(i)}$, *то* $\varphi_B(c_i) = \mathbf{q}_B^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_A^{(i)}$, *и множество* Q_B *включает в себя все различные векторы* $\mathbf{q}_B^{(i)} = \overline{\mathbf{q}}_A^{(i)}$, $c_i \in C$;

3) если для ребра $g_{ij} \in \mathcal{G}$ $f_A(g_{ij}) = \mathcal{A}_{ij}^\circ$, *то* $f_B(g_{ij}) = \mathcal{B}_{ij}^*$, *где*

$$\mathcal{B}_{ij}^* = \langle X^{(i,j)},\ \mathcal{B}_i,\ \mathcal{B}_j,\ Y^{(i,j)},\ \{\mathbf{F}_B^{(i,j)}(s,l)\}\rangle, \qquad \mathbf{F}_B^{(i,j)}(s,l) = \overline{\mathbf{F}}_A^{(i,j)}(s,l)$$

для всех $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$, *и множество* $\mathcal{B}^*$ *включает в себя все такие различные автоматные структуры* $\mathcal{B}_{ij}^*$, $g_{ij} \in \mathcal{G}$, c_i, $c_j \in C$.

Тогда для этих автоматов выполняется

$$\widetilde{\mathcal{A}}_f^\circ \approx \overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^*, \qquad \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}_f^\circ \approx \widetilde{\mathcal{B}}_f^*. \tag{10}$$

Доказательство. Для того чтобы показать, что $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ} \approx \overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*}$, необходимо установить, что автоматы $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$ и $\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*}$, индуцируют одни и те же спектры взаимосвязанных нечетких отображений $\widetilde{\Phi}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ})}$ и $\widetilde{\Phi}^{(\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*})}$. Заметим при этом, что согласно определению дополнения автомата $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*}$ выполнено $\widetilde{\Phi}^{(\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*})} = \overline{\widetilde{\Phi}}^{(\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*})}$.

Зафиксируем вершину $c_i \in C$. Рассмотрим любой путь $\Omega_{0i}^{(t)} \in \widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)}$, который проходит через последовательность вершин $c_0 = c_{i_0}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_t} = c_i$, пару слов $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\Omega_{0i}^{(t)})$, $|w| = |v| = t$, и пусть этот путь отмечен последовательностью элементарных автоматных структур $\mathcal{A}_{i_0 i_1}^{\circ}, \mathcal{A}_{i_1 i_2}^{\circ}, \ldots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}^{\circ}$ в автомате $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$. Запишем вес отображения слова w в слово v (7), порождаемого путем $\Omega_{0i}^{(t)}$ структурного графа $\mathcal{G}_A$ автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$, тогда:

$$\Phi_i^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ})}(w, v) = \mathbf{r}_A \circ \prod_{\nu=1}^{t}{}^{\circ} \mathbf{F}_A^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \circ \mathbf{q}_A^{(i_t)} = \overline{\mathbf{r}}_B \circ \prod_{\nu=1}^{t}{}^{\circ} \overline{\mathbf{F}}_B^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) \circ \overline{\mathbf{q}}_B^{(i_t)} =$$

$$= \overline{\mathbf{r}_B * \prod_{\nu=1}^{t}{}^{*} \mathbf{F}_B^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(s_\nu, l_\nu) * \mathbf{q}_B^{(i_t)}} = \overline{\Phi}_i^{(\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*})}(w, v),$$

согласно теореме 1 и условиям теоремы 2.

В силу произвольности выбранного пути $\Omega_{0i}^{(t)} \in \widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)}$ можно утверждать, что $\widetilde{\Phi}_i^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ})}(w, v) = \overline{\widetilde{\Phi}}_i^{(\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*})}(w, v)$ для всех пар слов $(w, v) \in Z_{\text{доп}}(\widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)})$, $|w| = |v| = t$, вершина $c_i \in C$ тоже была выбрана произвольно, значит можно утверждать, что $\widetilde{\Phi}^{(\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ})} = \overline{\widetilde{\Phi}}^{(\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*})} = \widetilde{\Phi}^{(\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*})}$ и согласно определению эквивалентность автоматов $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$ и $\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*}$. Проведя аналогичные рассуждения можно установить, что $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}}_f^{\circ} \approx \widetilde{\mathcal{B}}_f^{*}$. Теорема доказана.

Следствие. *Если конечно-нестационарные нечеткие автоматы $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и автомат $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}}_f^{\circ}$ находится в минимальной форме, то автомат $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{*}$ также находится в минимальной форме, обратно, если автомат $\overline{\widetilde{\mathcal{B}}}_f^{*}$ находится в минимальной форме, то и автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{\circ}$ находится в минимальной форме.*

Справедливость данного следствия очевидна, поскольку указанные конечно-нестационарные нечеткие автоматы согласно (10) эквивалентны, и возможность удаления любого состояния в какой-либо вершине одного из автоматов непосредственно приводит к возможности редукции соответствующего состояния в другом автомате с необходимым преобразованием элементов матриц переходов, начальных и финальных векторов.

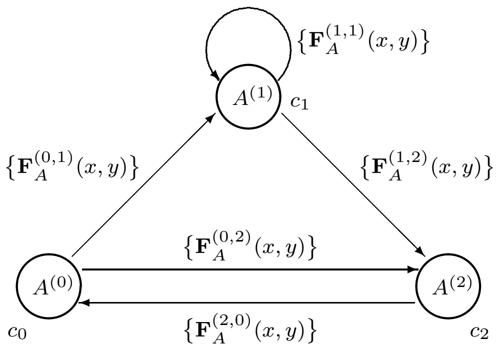
7. Алгоритм минимизации автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{*}$. Опираясь на результаты п. 6, можно сформулировать следующую процедуру построения минимальной формы заданного «оптимистического» конечно-нестационарного нечеткого автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{*}$ (6):

а) используя теорему 2, построить для автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^{*}$ его дополнение — автомат $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}}_f^{*} = \widetilde{\mathcal{B}}_f^{\circ}$, являющийся «пессимистическим» конечно-нестационарным нечетким автоматом;

б) используя методику минимизации конечно-нестационарных максиминных («пессимистических») нечетких автоматов, предложенную в работах [5, 6], найти минимальную форму автомата $\widetilde{\mathcal{B}}_f^{\circ}$ — автомат $\widetilde{\mathcal{V}}_f^{\circ} = \min \widetilde{\mathcal{B}}_f^{\circ}$;

в) перейти от полученного автомата $\widetilde{\mathcal{V}}_f^{\circ}$ к автомату $\bar{\widetilde{\mathcal{V}}}_f^{\circ}$, который согласно теореме 2 и следствию из нее дает решение данной задачи, т. е. минимаксный («оптимистический») нечеткий конечно-нестационарный автомат $\widetilde{\mathcal{D}}_f^* = \bar{\widetilde{\mathcal{V}}}_f^{\circ}$ такой, что $\widetilde{\mathcal{D}}_f^* = \min \widetilde{\mathcal{A}}_f^*$.

8. Пример. Пусть задан обобщенный «оптимистический» нечеткий конечно-нестационарный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f^* = \langle X, \mathcal{A}^*, Y, \mathbf{r}_A, \mathcal{G}_A(G, C, c_0, f_A, \varphi_A), Q_A \rangle$, граф которого представлен на рисунке.



В этом автомате $\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,7 & 0,7 \end{pmatrix}$,
$X^{(0,1)} = \{x_0\},\ Y^{(0,1)} = \{y_0, y_1\},\ A_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\},\ A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,3 & 0,9 & 0,7 & 0,9 \\ 0,4 & 0,8 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 & 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 & 0,8 & 0,7 \\ 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix},$$

$X^{(1,1)} = \{x_1\},\ Y^{(1,1)} = \{y_0, y_1\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 & 0,5 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,9 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,9 \end{pmatrix},$$

$X^{(1,2)} = \{x_0, x_1\},\ Y^{(1,2)} = \{y_0, y_1\},\ A_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathbf{F}_A^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 & 0,7 & 0,7 \\ 0,9 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 1 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,9 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_A^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,9 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 1 & 0,6 & 0,7 & 0,7 \\ 0,9 & 0,4 & 0,9 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$X^{(0,2)} = \{x_0\},\ Y^{(0,2)} = \{y_0, y_1\},$

$$\mathbf{F}_A^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,9 & 0,8 & 1 \\ 0,9 & 0,9 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,8 & 0,9 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$X^{(2,0)} = \{x_0\},\ Y^{(2,0)} = \{y_0, y_1\},$

$$\mathbf{F}_A^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,8 & 1 \\ 0,8 & 0,9 & 0,8 & 0,8 \\ 0,7 & 0,4 & 0,4 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_A^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 0,7 & 0,8 \\ 0,8 & 0,9 & 0,9 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_A^{(0)} = (0,4\ \ 0,7\ \ 0,7\ \ 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_A^{(1)} = (0,6\ \ 0,5\ \ 0,7\ \ 0,5)^T, \quad \mathbf{q}_A^{(2)} = (0,9\ \ 0,9\ \ 0,4\ \ 0,7)^T.$$

Требуется построить его минимальную форму. В соответствии с первым шагом алгоритма из п. 7 для заданного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^*$ строим автомат $\overline{\overline{\widetilde{\mathcal{A}}}}{}_f^* = \widetilde{\mathcal{B}}_f^\circ$ (9) согласно теореме 2, представляющий собой обобщенный «пессимистический» конечно-нестационарный нечеткий автомат с теми же структурным графом и алфавитами входов и выходов, где $B_0 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\},\ B_1 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}, B_2 = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{r}_B = \big(0,7 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0,3\big)$,

$$\mathbf{F}_B^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,9 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_B^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_B^{(0)} = (0,6\ \ 0,3\ \ 0,3\ \ 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_B^{(1)} = (0,4\ \ 0,5\ \ 0,3\ \ 0,5)^T, \quad \mathbf{q}_B^{(2)} = (0,1\ \ 0,1\ \ 0,6\ \ 0,3)^T.$$

Далее, в соответствии со вторым шагом алгоритма производим минимизацию автомата $\widetilde{\mathcal{B}}_f^\circ$ с помощью алгоритма, приведенного в работе [6]. Получаем конечно-нестационарный «пессимистический» нечеткий автомат $\widetilde{\mathcal{V}}_f^\circ = \langle X, \mathcal{V}^*, Y, \mathbf{r}_V, \mathcal{G}_V(G, C, c_0, f_V, \varphi_V), Q_V \rangle$ с теми же структурным графом и алфавитами входов и выходов, где $V_0 = \{v_0, v_1\}$, $V_1 = \{v_0, v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_0, v_1\}$, $\mathbf{r}_V = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{F}_V^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,8 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_V^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_V^{(0)} = (0,6 \;\; 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_V^{(1)} = (0,4 \;\; 0,5 \;\; 0,3)^T, \quad \mathbf{q}_V^{(2)} = (0,1 \;\; 0,6)^T.$$

Выполняя преобразование $\overline{\widetilde{\mathcal{V}}}_f^\circ = \widetilde{\mathcal{D}}_f^*$, получаем обобщенный конечно-нестационарный «оптимистический» нечеткий автомат $\widetilde{\mathcal{D}}_f^* = \langle X, \mathcal{D}^*, Y, \mathbf{r}_D, \mathcal{G}_D(G, C, c_0, f_D, \varphi_D), Q_D \rangle$, эквивалентный автомату $\widetilde{\mathcal{A}}_f^*$, с теми же структурным графом и алфавитами, что и у автомата $\widetilde{\mathcal{V}}_f^\circ$. У полученного автомата $\mathbf{r}_D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{F}_D^{(0,1)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 1 \\ 0,3 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(0,1)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,3 \\ 0,7 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,1)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(1,1)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(1,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(1,2)}(1,0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(1,2)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 \\ 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(0,2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(0,2)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_D^{(2,0)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_D^{(2,0)}(0,1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_D^{(0)} = (0,4 \;\; 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_D^{(1)} = (0,6 \;\; 0,5 \;\; 0,7)^T, \quad \mathbf{q}_D^{(2)} = (0,9 \;\; 0,4)^T,$$

и он является минимальной формой исходного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f^*$.

Литература

1. *Пономарева А. Ю., Чирков М. К.* Об одном методе минимизации обобщенных «оптимистических» нечетких автоматов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Вып. 3. Сер. 1. 2013. С. 75–81.
2. *Santos E. S.* Maximin, minimax and composite sequential machines // J. Math. Anal. Appl. Vol. 24. 1968. P. 246–259.
3. *Kandel A., Lee S. C.* Fuzzy Switching and Automata: Theory and Applications. New York: Crane, Russak & Comp. Inc., 1979. 303 p.
4. *Хохулина В. А., Чирков М. К.* О разложении «оптимистических» нечетких автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 11. СПб.: ВВМ, 2010. С. 134–147.
5. *Пономарева А. Ю., Строилов Р. В.* Приведенные формы конечно-нестационарных нечетких автоматов // Математические модели. Теория и приложения. Вып. 12. СПб.: ВВМ, 2011. С. 150–166.
6. *Пономарева А. Ю., Строилов Р. В., Чирков М. К.* Матричные методы построения минимальных форм конечно-нестационарных максиминных нечетких автоматов // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 10. Вып. 1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. С. 101–121.
7. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Сведения об авторах

Пономарёва Александра Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент; a_ponomareva@mail.ru

Чирков Михаил Константинович — доктор физико-математических наук, профессор; mkchirk@mail.ru

OPTIMIZATION OF GENERALIZED FINITE NON-STATIONARY MINIMAX FUZZY AUTOMATA

Aleksandra Yu. Ponomareva, Mikhail K. Chirkov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; a_ponomareva@mail.ru, mkchirk@mail.ru

In the paper it is theoretically ground and elaborated a special method for minimization of the states number and construct a minimal form of a generalized finite non-stationary minimax fuzzy automata which is based on the previously proven theorem about maximin and minimax fuzzy matrices product and elaborated matrix method for optimization of a generalized finite non-stationary maximin fuzzy automata. It is proved that from the given generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton may be turn to generalized finite non-stationary maximin fuzzy automata, which is an addition to the initial minimax automaton. It is also proved that if given the generalized finite non-stationary minimax and maximin fuzzy automata are addition of each other, their minimal forms have the same number of states, which allows first turn from the generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton to generalized finite non-stationary maximin fuzzy automaton, then to minimize this obtained generalized maxmin fuzzy automaton by known method of transform matrix and turn back to its addition, get a minimal form of initial generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton. As a result, the procedure and the corresponding algorithm of minimization of the number of states and construct a minimal form of a generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton worked out. Finally, an example of application of the proposed special method of minimization to the given generalized finite non-stationary minimax fuzzy automaton is given. Refs 7.

Keywords: generalized finite non-stationary minimax (“optimistic”) fuzzy automaton, generalized finite nonstationary maximin (“pessimistic”) fuzzy automaton, addition of a finite non-stationary minimax fuzzy automaton, a minimal form of a finite non-stationary minimax fuzzy automaton.