

## Аппроксимационно-оценочные критерии напряженно-деформируемого состояния твердого тела

А. В. Орехов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Орехов А. В. Аппроксимационно-оценочные критерии напряженно-деформируемого состояния твердого тела // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 230–242. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.304>

При решении некоторых прикладных задач представляет практический интерес получение статистических критериев, позволяющих описать качественное изменение поведения величин, аналитический вид которых неизвестен. В статье выводятся «аппроксимационно-оценочные критерии» (approximation-evaluation tests) для определения момента, когда тип возрастания монотонной последовательности числовых параметров твердого тела, характеризующих его напряженно-деформируемое состояние (НДС), изменяется с линейного на параболический, что, в свою очередь, может быть предвестником потери прочности. Этот феномен описан в ряде работ, посвященных упругопластическим деформациям, росту трещин, циклическим нагрузкам и т. п. Предлагаемые критерии НДС основаны на сравнении квадратичных погрешностей линейной и неполной параболической аппроксимаций. Они представляют собой квадратичные формы, равные разности соответствующих погрешностей. В момент изменения типа возрастания числовой последовательности, характеризующей НДС твердого тела, построенные квадратичные формы меняют знак. Коэффициенты аппроксимирующих функций ищутся при помощи метода наименьших квадратов. Эти функции строятся локально, не по всем значениям последовательности, а только по нескольким ее членам, расположенным в левой полукрестности точки, исследуемой на указанное изменение характера возрастания. Решена обратная задача, в которой вычислены критические значения последовательности, при которых квадратичные погрешности линейной и неполной параболической аппроксимаций равны. На примере показано, что простое сравнение конечных разностей не может использоваться для определения точки, в которой линейное возрастание переходит в параболическое.

*Ключевые слова:* напряженно-деформируемое состояние, метод наименьших квадратов.

**Введение.** Основное требование, предъявляемое к любой конструкции, состоит в том, чтобы она обладала прочностью, жесткостью и устойчивостью. Расчеты этих параметров основаны на экспериментальных данных и допущениях, принятых в рамках таких дисциплин как строительная механика, сопротивление материалов и теория упругости. Как правило, результаты экспериментов являются функциями, заданными только лишь в виде таблиц.

До тех пор, пока деформации и нагрузки связаны линейно, упомянутые выше допущения основываются на обобщенном законе Гука, но когда связь между деформацией и нагрузкой становится нелинейной, ситуация существенно усложняется, а свойства конструкции приобретают новое качество, не всегда позитивное. Например, растрескивание и разрушение конструкций из упругопластических материалов

непосредственно связаны с развитием пластической деформации. Если рассмотреть зависимость длины пластической зоны от действующего напряжения, то легко заметить изменение вида ее возрастания, которое сначала является линейным, а потом становится параболическим (рис. 1). Увеличение раскрытия в вершине трещины в зависимости от растягивающего напряжения также описывается переходом от линейного к нелинейному возрастанию (рис. 2) [1].

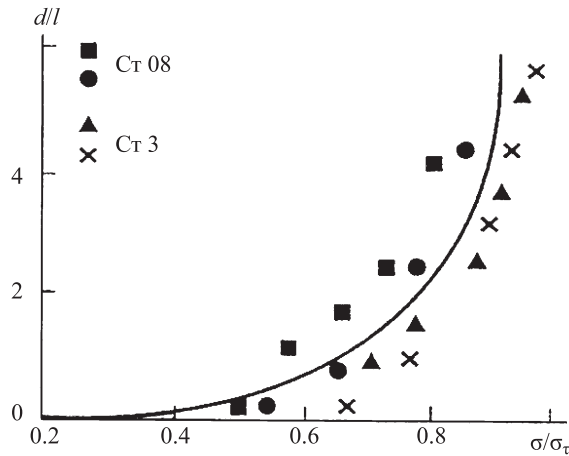


Рис. 1. Графики изменения длины пластической зоны от действующего напряжения  
Сплошная линия построена по аналитической формуле, точки соответствуют  
экспериментальным данным для двух типов листовой стали разной толщины [1].

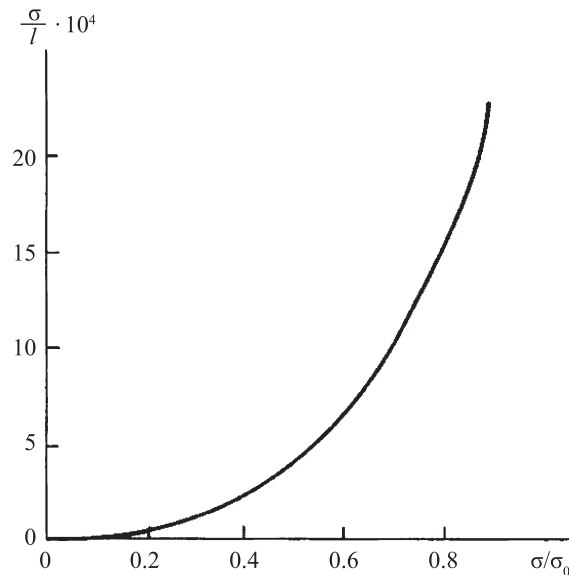


Рис. 2. Увеличение пластического раскрытия в вершине трещины  
в зависимости от растягивающего напряжения [1]

Аналогичные изменения параметров напряженно-деформируемого состояния наблюдаются во многих случаях: при продольно-поперечном изгибе балок, когда продольная сила приближается к своему критическому значению и прогибы начинают интенсивно расти [2], в начале пластической деформации для SD-материалов (рис. 3) [3–5], при циклическом разрушении за счет роста трещин [6, 7], для некоторых титановых сплавов, обладающих свойством наведенной разнсопротивляемости [8], и т. п.

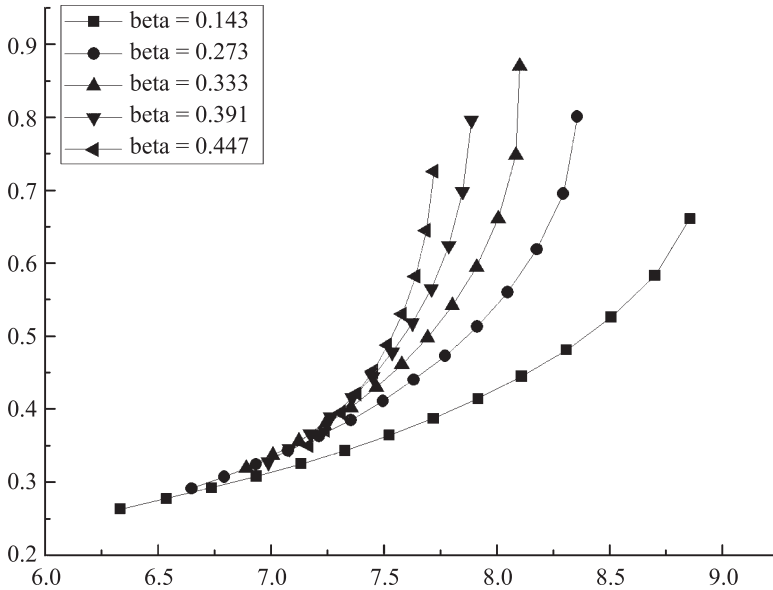


Рис. 3. Графики изменения приведенной стрелы прогиба  
Ось абсцисс — приведенная нагрузка, ось ординат — приведенная стрела прогиба [3].

Выведем аппроксимационно-оценочные критерии  $\delta^2(k_0)$ , предназначенные для определения точки, в которой вид возрастания монотонной последовательности  $y_n$  числовых параметров твердого тела, характеризующих его НДС, изменяется с линейного на параболический [9–11]. Будем строить эти критерии в виде статистик, основанных на сравнении квадратичных погрешностей аппроксимации в классе линейных функций  $f(x) = ax + b$  и в классе неполных многочленов второй степени (без линейного члена)  $f(x) = cx^2 + d$ .

**Линейное и степенное изменение числовых последовательностей.** Рассмотрим отображения, заданные на дискретном подмножестве точек числовой прямой  $\{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$ .

Если все эти точки являются равноотстоящими, т. е. для  $\forall n: t_n - t_{n-1} = T$ , то такие функции называют *решетчатыми* и обозначают как  $f[nT]$ , где  $T$  — период дискретности [12].

Переход от линейной зависимости к нелинейной не зависит от масштаба, поэтому за счет преобразования подобия период дискретности  $T$  можно свести к единичному и рассматривать в дальнейшем решетчатые функции целого неотрицательного аргумента, т. е. числовые последовательности. Далее будем записывать их в общепринятых обозначениях:  $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$

Примем соглашение, что последовательность  $y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$  неотрицательна, монотонно возрастает и аргумент  $y_n$  сначала изменяется «почти линейно», а затем «скорее параболически, чем линейно».

Для дальнейших построений необходимо договориться о формальном понимании терминов: «линейное возрастание» и «параболическое возрастание» числовой последовательности. При этом оценивание характера изменения  $y_n$  подразумевается локальным, т. е. не по всем ее значениям, а только по нескольким элементам:  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ .

Воспользуемся понятием аппроксимирующей функции.

Узлами аппроксимации для числовой последовательности  $y_n$  являются упорядоченные пары  $(i, y_i)$ , где  $i$  — натуральный аргумент,  $y_i$  — соответствующее значение последовательности  $y_n$ . Так как подстрочный индекс последовательности  $y_n$  однозначно определяет величину натурального аргумента, узел аппроксимации  $(i, y_i)$  будем отождествлять с элементом последовательности  $y_i$ .

Аппроксимирующей функцией из класса  $X$  для узлов  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  называют отображение  $f(x)$ , наиболее близкое к этим точкам (в определенном смысле) среди всех отображений из  $X$ .

Отрезок вещественной оси  $[y_0, y_{k-1}]$ , на котором расположены узлы  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ , будем называть *текущим промежутком аппроксимации*.

Под квадратичной погрешностью аппроксимации для функции  $f(x)$  принято понимать сумму квадратов разностей значений числовой последовательности в узлах аппроксимации и аппроксимирующей функции при соответствующем аргументе:

$$\delta_f^2 = \sum_{i=0}^{k-1} (f(i) - y_i)^2.$$

Функция  $f(x)$  из класса  $X$  является аппроксимирующей для узлов  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ , в смысле квадратичного приближения (по методу наименьших квадратов), если для  $f(x)$  справедливо, что

$$\delta_f^2 = \min_{f \in X} \sum_{i=0}^{k-1} (f(i) - y_i)^2,$$

такой минимум найдется, так как  $\delta_f^2$  — положительно определенная квадратичная форма.

Будем различать линейную аппроксимацию в классе функций вида

$$l(x) = ax + b,$$

полную параболическую аппроксимацию в классе функций

$$Q(x) = ax^2 + bx + c,$$

неполную параболическую аппроксимацию (без линейного члена) в классе функций

$$q(x) = cx^2 + d.$$

Обозначим квадратичную погрешность линейной аппроксимации по  $k$  узлам как

$$\delta_l^2(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot i + b - y_i)^2, \quad (1)$$

квадратичную погрешность полной параболической аппроксимации по  $k$  узлам как

$$\delta_Q^2(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot i^2 + b \cdot i + c - y_i)^2,$$

квадратичную погрешность неполной параболической аппроксимации по  $k$  узлам как

$$\delta_q^2(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (c \cdot i^2 + d - y_i)^2. \quad (2)$$

Если в наших рассуждениях конкретное количество узлов аппроксимации не играет роли или все очевидно из контекста, то соответствующие квадратичные погрешности будем просто обозначать  $\delta_l^2$ ,  $\delta_Q^2$ ,  $\delta_q^2$ .

Известно, что полная параболическая аппроксимация всегда не хуже, чем линейная, т. е. справедливо неравенство  $\delta_Q^2 \leq \delta_l^2$ . Равенство  $\delta_Q^2$  и  $\delta_l^2$  возможно тогда, когда аппроксимируемая последовательность изменяется линейно, т. е. является арифметической прогрессией. В этом случае коэффициент квадратичного члена полной параболической аппроксимации обращается в нуль и обе аппроксимирующие функции становятся тождественными. Если же рассмотреть неполную параболическую аппроксимацию, то она всегда не лучше, чем полная параболическая аппроксимация, т. е. справедливо неравенство  $\delta_q^2 \geq \delta_Q^2$ .

При сравнении  $\delta_l^2$  и  $\delta_q^2$  возможны три случая:  $\delta_q^2 < \delta_l^2$ ;  $\delta_q^2 > \delta_l^2$ ;  $\delta_q^2 = \delta_l^2$ .

Положим по определению, что последовательность  $y_n$  имеет *линейное возрастание* в узлах (точках)  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ , если  $y_n$  монотонна и квадратичные погрешности линейной и неполной параболической аппроксимаций связаны неравенством  $\delta_q^2 > \delta_l^2$ . Если при тех же условиях справедливо неравенство  $\delta_q^2 < \delta_l^2$ , то последовательность  $y_n$  имеет *параболическое возрастание*. И наконец, если для набора узлов аппроксимации  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  выполняется равенство  $\delta_q^2 = \delta_l^2$ , то тогда точка  $y_{k-1}$  называется *критической*.

**Вычисление коэффициентов аппроксимирующих функций.** Определим по методу наименьших квадратов коэффициенты  $a, b$  линейной функции  $ax + b$ , которая аппроксимирует узлы  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ .

Для этого найдем локальный минимум функции двух переменных  $a$  и  $b$

$$f_l(a, b) = \sum_{i=0}^{k-1} ((a \cdot i + b) - y_i)^2.$$

Стационарные точки функции  $f_l(a, b)$  вычислим обычным способом, приравняв к нулю ее частные производные по переменным  $a, b$ :

$$\frac{\partial f_l}{\partial a} = 2a \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + 2b \sum_{i=0}^{k-1} i - 2 \sum_{i=0}^{k-1} i \cdot y_i,$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial b} = 2a \sum_{i=0}^{k-1} i + 2b \sum_{i=0}^{k-1} 1 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} y_i$$

и решив соответствующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \cdot a + \frac{k(k-1)}{2} \cdot b = y_1 + 2y_2 + \dots + (k-1)y_{k-1}, \\ \frac{k(k-1)}{2} \cdot a + k \cdot b = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \end{cases}$$

По правилу Крамера  $a = \frac{\Delta_a}{\Delta}$ ,  $b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$ , где

$$\Delta = \frac{k^2(k^2 - 1)}{12}, \quad \Delta_a = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (2i + 1 - k)y_i, \quad \Delta_b = \frac{k(k+1)}{6} \sum_{i=0}^{k-1} (2k - 1 - 3i)y_i,$$

откуда

$$a = \frac{6}{k(k^2 - 1)} \sum_{i=0}^{k-1} (2i + 1 - k)y_i, \quad b = \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=0}^{k-1} (2k - 1 - 3i)y_i. \quad (3)$$

Теперь по методу наименьших квадратов вычислим коэффициенты  $c, d$  для неполной квадратичной функции  $cx^2 + d$ , аппроксимирующей узлы  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ .

Найдем локальный минимум функций двух переменных  $c$  и  $d$ :

$$f_q(c, d) = \sum_{i=0}^{k-1} ((c \cdot i^2 + d) - y_i)^2.$$

Вычисляем частные производные по  $c$  и  $d$ :

$$\frac{\partial f_q}{\partial c} = 2c \sum_{i=0}^{k-1} i^4 + 2d \sum_{i=0}^{k-1} i^2 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \cdot y_i,$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial d} = 2c \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + 2d \sum_{i=0}^{k-1} 1 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} y_i,$$

приравниваем их к нулю и составляем систему из двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $c, d$

$$\begin{cases} \frac{k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)}{30} \cdot c + \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \cdot d = \sum_{i=1}^{k-1} i^2 \cdot y_i, \\ \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \cdot c + k \cdot d = \sum_{i=0}^{k-1} y_i, \end{cases}$$

для которой

$$\Delta = \frac{k^2(k-1)(2k-1)(8k^2-3k-11)}{180}, \quad \Delta_c = \frac{k}{6} \sum_{i=0}^{k-1} (6i^2 - (k-1)(2k-1))y_i,$$

$$\Delta_d = \frac{k(k-1)(2k-1)}{30} \sum_{i=0}^{k-1} (3k(k-1) - 1 - 5i^2)y_i,$$

$$c = \frac{30}{k(k-1)(2k-1)(8k^2-3k-11)} \sum_{i=0}^{k-1} (6i^2 - (k-1)(2k-1))y_i, \quad (4)$$

$$d = \frac{6}{k(8k^2-3k-11)} \sum_{i=0}^{k-1} (3k(k-1) - 1 - 5i^2)y_i. \quad (5)$$

**Построение квадратичной формы критерия.** Чтобы определить момент, когда характер возрастания монотонной последовательности  $y_n$  изменяется с линейного на параболический, сконструируем аппроксимационно-оценочный критерий  $\delta^2$ .

Будем считать по определению, что для узлов аппроксимации  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  критерий  $\delta^2 = \delta_l^2(k_0) = \delta_l^2(k_0) - \delta_q^2(k_0)$ . При этом положим, что всегда  $y_0 = 0$ . Выполнения этого условия легко добиться на любом шаге аппроксимации при помощи преобразования:  $y_0 = y_j - y_j$ ,  $y_1 = y_{j+1} - y_j$ ,  $\dots$ ,  $y_{k-1} = y_{j+k-1} - y_j$ .

Используя формулы (1)–(5), выпишем в явном виде аппроксимирующие функции по трем точкам  $y_0, y_1, y_2$  и вычислим квадратичные погрешности для них:

$$ax + b = \frac{1}{6}(3xy_2 + 2y_1 - y_2), \quad cx^2 + d = \frac{2}{52}(x^2(7y_2 - 2y_1) + 12y_1 - 3y_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_l^2(3_0) &= \sum_{i=0}^2 (a \cdot i + b - y_i)^2 = \left( \frac{1}{6}(0 \cdot 3y_2 + 2y_1 - y_2) + 0 \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{1}{6}(1 \cdot 3y_2 + 2y_1 - y_2) - y_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{6}(2 \cdot 3y_2 + 2y_1 - y_2) - y_2 \right)^2 = \frac{1}{6}(y_2 - 2y_1)^2, \\ \delta_q^2(3_0) &= \sum_{i=0}^2 (c \cdot i^2 + d - y_i)^2 = \left( \frac{2}{52}(0^2 \cdot (7y_2 - 2y_1) + 12y_1 - 3y_2) - y_0 \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{2}{52}(1^2 \cdot (7y_2 - 2y_1) + 12y_1 - 3y_2) - y_1 \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{2}{52}(2^2 \cdot (7y_2 - 2y_1) + 12y_1 - 3y_2) - y_2 \right)^2 = \frac{1}{26}(y_2 - 4y_1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta^2(3_0) = \delta_l^2(3_0) - \delta_q^2(3_0) = \frac{1}{6}(y_2 - 2y_1)^2 - \frac{1}{26}(y_2 - 4y_1)^2 = \frac{1}{39}(2y_1^2 - 14y_2y_1 + 5y_2^2). \quad (6)$$

Аналогичным образом вычислим аппроксимационно-оценочный критерий по четырем, пяти, шести и семи узлам аппроксимации:

$$\delta^2(4_0) = \frac{1}{245}(19y_1^2 - 11y_2^2 + 41y_3^2 + 12y_1y_2 - 64y_1y_3 - 46y_2y_3), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta^2(5_0) &= \frac{1}{435}(19y_1^2 + 10y_2^2 - 21y_3^2 + 76y_4^2 + \\ &+ 2y_1(25y_2 + 6y_3 - 38y_4) - 10y_2(3y_3 + 10y_4) - 24y_3y_4, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta^2(6_0) &= \frac{4}{42735}(y_1(983y_2 + 977y_3 + 236y_4 - 1240y_5) + \\ &+ y_2(344y_3 - 673y_4 - 2155y_5) + 127y_1^2 + 448y_2^2 - \\ &- 152y_3^2 - 323y_4^2 + 1825y_5^2 - 967y_3y_4 - 1645y_3y_5 + 290y_4y_5, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta^2(7_0) &= \frac{1}{546}(-6y_1^2 + 21y_2^2 + 8y_3^2 - 15y_4^2 - 6y_5^2 + 89y_6^2 + 36y_2y_3 + 12y_2y_4 - \\ &- 12y_3y_4 - 30y_2y_5 - 48y_3y_5 - 42y_4y_5 - 90y_2y_6 - 92y_3y_6 - \\ &- 48y_4y_6 + 42y_5y_6 + 6y_1(5y_2 + 8y_3 + 7y_4 + 2y_5 - 7y_6)). \end{aligned} \quad (10)$$

**Решение обратной задачи и замечание о конечных разностях.** Определенный интерес представляет решение «обратной задачи». А именно, пусть известны значения последовательности  $y_n$  в узлах  $y_0, y_1, \dots, y_{k-2}$  и требуется определить, при каком значении в узле  $y_{k-1}$  можно сказать, что характер возрастания последовательности  $y_n$  изменился с линейного на параболический. Иными словами, надо вычислить, при каком числовом значении точка  $y_{k-1}$  станет критической.

Решим эту задачу для узлов  $y_0, y_1, y_2, y_3$ .

Приравняем к нулю квадратичную форму  $\delta^2(4_0)$ , заменим  $y_3$  на  $x$  и получим квадратное уравнение

$$41x^2 - (64y_1 + 46y_2)x + (19y_1^2 + 12y_2y_1 - 11y_2^2) = 0,$$

для которого

$$x_{1,2} = \frac{32y_1 + 23y_2 \pm 7\sqrt{5}(y_1 + 2y_2)}{41}.$$

Учитывая, что  $7\sqrt{5} \simeq 15.65$  и  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3$ , окончательно получим

$$y_3 = \frac{32y_1 + 23y_2 + 7\sqrt{5}(y_1 + 2y_2)}{41}. \quad (11)$$

Теперь можно ответить на достаточно часто возникающий вопрос: «Почему нельзя ограничиться простым сравнением конечных разностей?». Здесь имеется в виду, что при переходе к параболическому возрастанию конечная разность  $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1}$  больше, чем предыдущая конечная разность  $\Delta y_{k-2} = y_{k-1} - y_{k-2}$ , т. е.  $\frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta y_{k-2}} = K > 1$ .

Естественно вызывает интерес ответный вопрос: «Чему равно  $K$  при критическом значении  $y_{k-1}$ ?».

Рассмотрим пример, дающий ответы на эти вопросы. Воспользуемся формулой (11) для определения критического значения в узле  $y_3$  по известным  $y_0, y_1, y_2$ .

Пусть сначала  $y_0 = 0, y_1 = 0.1, y_2 = 0.2$ . Тогда по формуле (11)  $y_3 = 0.381128$ . Вычислим отношение конечных разностей для полученного критического значения  $y_3$  и получим, что  $K = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = 1.8112$ . Значение  $K = 1.8113$  соответствует «уже» параболическому возрастанию, а отношение конечных разностей  $K = 1.8111$  — «еще» линейному изменению последовательности  $y_n$ .

Для узлов аппроксимации  $y_0 = 0, y_1 = 1.1, y_2 = 2.3$  по формуле (11)  $y_3 = 4.32486$  и тогда  $K = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = 1.687385$ , и, наконец, для  $y_0 = 0, y_1 = 0.1, y_2 = 0.3$  по формуле (11)  $y_3 = 0.513579$ , а  $K = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = 1.06785$ .

Таким образом, для трех различных наборов узлов  $y_0, y_1, y_2$  и критического значения в точке  $y_3$  получены различные значения отношения конечных разностей первого порядка. Следовательно, сравнение конечных разностей элементов последовательности  $y_n$  не может применяться для нахождения критерия, определяющего точку изменения характера ее возрастания.

**Тангенс-тест.** Рассмотрим простой вычислительный эксперимент, который назовем *тангенс-тестом*. В качестве модельной функции используем  $\operatorname{tg} x$ . Как известно, в окрестности нуля  $\operatorname{tg} x \sim x$ . При стремлении аргумента  $x$  к  $\frac{\pi}{2}$  слева функция  $\operatorname{tg} x$



является бесконечно большой и приближается к вертикальной асимптоте  $x = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому на интервале  $(0, 1.571)$  должна найтись точка, левее которой возрастание  $\operatorname{tg} x$  ближе к линейному, а справа от нее функция  $\operatorname{tg} x$  точнее аппроксимируется параболой. Согласно ранее принятому соглашению, такая точка называется *критическим значением* аргумента. В таблице приведены результаты тангенс-теста для аппроксимационно-оценочного критерия по трем, четырем, пяти, шести и семи узлам аппроксимации; значения критерия  $\delta^2$  вычислялись по формулам (6)–(10).

*Таблица. Тангенс-тест для аппроксимационно-оценочного критерия*

Шаг $T$	Минимальная оценка сверху критического значения аргумента				
	$y_0 - y_2$	$y_0 - y_3$	$y_0 - y_4$	$y_0 - y_5$	$y_0 - y_6$
0.1	1.3	1.2	1.1	1.1	1.0
0.09	1.35	1.26	1.17	1.08	0.99
0.08	1.36	1.28	1.2	1.12	1.04
0.07	1.4	1.33	1.19	1.12	1.12
0.06	1.44	1.32	1.26	1.2	1.14
0.05	1.45	1.35	1.3	1.25	1.2
0.04	1.48	1.4	1.36	1.28	1.24
0.03	1.5	1.44	1.41	1.35	1.32
0.02	1.52	1.48	1.46	1.42	1.4
0.01	1.55	1.53	1.51	1.5	1.48

В левом столбце таблицы указано значение шага дискретности, в следующих столбцах — минимальная оценка сверху для критического значения аргумента по трем, четырем, пяти, шести и семи точкам соответственно.

Нетрудно заметить, что по мере уменьшения шага дискретности критическая точка сдвигается вправо, ближе к вертикальной асимптоте. В то же время при увеличении числа узлов аппроксимации критическая точка при одном и том же шаге дискретности сдвигается влево, но этот феномен имеет место только для последовательностей выпуклых вниз, т. е. для последовательностей, конечные разности второго порядка которых положительны.

Можно сделать следующее наблюдение. Рассмотрим минимальную оценку сверху критического значения аргумента, равную 1.2. Для критерия, построенного по четырем узлам, она приходится на шаг дискретности 0.1, по пяти узлам — на шаг 0.08, по шести узлам — на шаг 0.06 и по семи узлам — на шаг 0.05. При этом длина текущего интервала аппроксимации для критериев, построенных по четырем, пяти, шести и семи точкам соответственно, равна 0.3, 0.32, 0.3, 0.3. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что между точностью аппроксимационно-оценочного критерия, шагом дискретности и количеством узлов аппроксимации существует детерминированная связь.

Необходимо обратить внимание еще на один факт: иногда при уменьшении шага дискретности нарушается монотонность увеличения минимальной оценки сверху для критического значения аргумента. Объяснение этому явлению простое: например, для семи точек при шаге дискретности 0.1 значение  $\operatorname{tg} x$ , при котором квадратичные погрешности линейной и неполной параболической аппроксимаций равны, находится внутри интервала  $(0.9, 1.0)$ , при уменьшении шага дискретности до 0.09 такая точка, хотя и сдвигается вправо, но оказывается внутри интервала  $(0.9, 0.99)$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $y_n$ , содержащую величины прогиба конструкции из модельного материала при равномерно возрастающей нагрузке:

$$y_1 = 1.000, y_2 = 1.515, y_3 = 2.030, y_4 = 2.545, y_5 = 3.060, y_6 = 3.989, y_7 = 4.504, \\ y_8 = 5.019, y_9 = 5.534, y_{10} = 6.049, y_{11} = 6.731, y_{12} = 7.246, y_{13} = 8.331, y_{14} = 9.010, \\ y_{15} = 10.026, y_{16} = 10.789, y_{17} = 11.545, y_{18} = 12.114, y_{19} = 14.270.$$

Для этого случая критерий  $\delta^2$  последовательно принимает следующие значения:

$$\delta_4^2 = -0.108, \delta_5^2 = -0.108, \delta_6^2 = -0.001, \delta_7^2 = -0.189, \delta_8^2 = -0.325, \delta_9^2 = -0.108, \\ \delta_{10}^2 = -0.108, \delta_{11}^2 = -0.072, \delta_{12}^2 = -0.138, \delta_{13}^2 = -0.036, \delta_{14}^2 = -0.176, \delta_{15}^2 = -0.370, \\ \delta_{16}^2 = -0.244, \delta_{17}^2 = -0.418, \delta_{18}^2 = -0.284, \delta_{19}^2 = 0.490.$$

Символ  $\delta_4^2$  обозначает величину критерия по узлам  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , символ  $\delta_5^2$  — по узлам  $y_2, y_3, y_4, y_5$  и т. д.

Первые пять членов  $y_n$  возрастают линейно как члены арифметической прогрессии с разностью 0.515. Критерий  $\delta^2$  сравнивает погрешности линейной и неполной квадратичной аппроксимаций по четырем узлам, поэтому первые два его значения, по  $y_1, y_2, y_3, y_4$  и по  $y_2, y_3, y_4, y_5$ , равны. Далее  $y_n$  возрастает уже не как арифметическая прогрессия, но ее рост остается почти линейным, так как  $\delta^2 = \delta_l^2 - \delta_q^2 < 0$ . И только для узлов

$$y_{16} = 10.789, y_{17} = 11.545, y_{18} = 12.114, y_{19} = 14.270$$

знак  $\delta^2$  становится положительным, а это означает, что характер возрастания  $y_n$  изменился и стал параболическим. График числовой последовательности  $y_n$ , изображенный на рис. 4, это наглядно подтверждает.

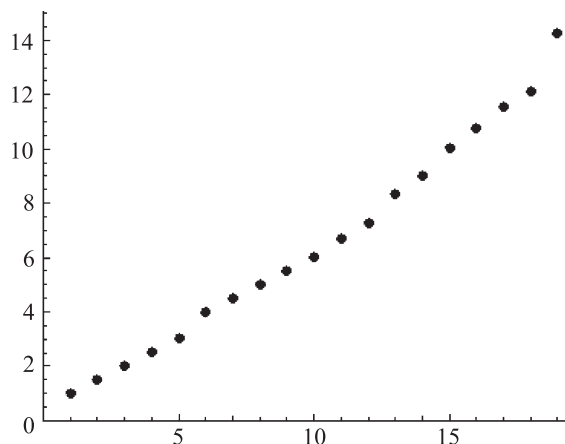


Рис. 4. График изменения прогиба конструкции из модельного материала при равномерно возрастающей нагрузке (прогиб (ось ординат) и нагрузка (ось абсцисс) заданы в безразмерных приведенных величинах)

**Заклучение.** Важная проблема, требующая отдельного обсуждения, связана с чувствительностью аппроксимационно-оценочных критериев к величине начального (до преобразования подобия) шага дискретности и, как следствие, к длине текущего промежутка аппроксимации. Действительно, приращение любой гладкой функции, как бесконечно малая величина, достаточно точно аппроксимируется ее главной линейной частью — дифференциалом. Но по мере увеличения приращения аргумента аппроксимация дифференциалом перестает быть удовлетворительной. Поэтому общего ответа на поставленную проблему не существует. В некотором смысле чувствительность аппроксимационно-оценочных критериев является субъективным понятием, зависящем (с психологической точки зрения) от побудительных мотивов и цели

исследователя, а также (в математическом аспекте) от длины текущего промежутка аппроксимации. При этом следует иметь в виду, что рост числа узлов аппроксимации неизбежно влечет за собой фактически геометрическое увеличение вычислительной сложности построения квадратичной формы для аппроксимационно-оценочных критериев.

Определенное облегчение ума доставляет следующая мысль: если шаг дискретности настолько мал, что на текущем промежутке аппроксимации не выявлено изменения характера возрастания параметров напряженно-деформируемого состояния твердого тела (эти параметры по-прежнему меняются линейно), то построение соответствующих математических моделей можно производить, оставаясь в рамках парадигмы обобщенного закона Гука.

В окончательном варианте можно предложить следующую формулировку критерия: вблизи элемента  $y_{k-1}$  характер возрастания последовательности  $y_n$  изменился с линейного на параболический, если для узлов  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  линейная аппроксимация не хуже неполной параболической, т. е. справедливо неравенство  $\delta^2 \leq 0$ , а для набора точек  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , сдвинутых на один шаг дискретности, неполная параболическая аппроксимация стала точнее линейной, т. е.  $\delta^2 > 0$ .

## Литература

1. Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения твердых тел. СПб.: Профессия, 2002. 320 с.
2. Терзугулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1964. 472 с.
3. Павилайнен Г. В., Юшин Р. Ю. Анализ учета упругой трансверсальной изотропии и пластической анизотропии при изгибе круглых пластин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2011. Вып. 1. С. 122–131.
4. Pavilaynen G. V., Yushin R. U. An approximate solution of elastic-plastic problem of circular strength different (SD) plates // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics: abstracts of the International conference. Dedicated to the memory of professor V. F. Demianov. Saint Petersburg: VVM Publ., 2017. P. 207–209.
5. Павилайнен Г. В. Математическое моделирование упруго-пластического изгиба балки, материал которой обладает эффектом SD // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2014–2015 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2015. С. 49–62.
6. Вансович К. А. Модель роста усталостных поверхностных трещин за цикл «нагрузка–разгрузка» // Омск. науч. вестн. 2017. № 3(153). С. 49–53.
7. Тихомиров В. М. Рост трещины при знакопеременном цикле нагружения // Прикл. механика и технич. физика. 2008. Т. 49, № 5(291). С. 190–198.
8. Трещев А. А., Полтавец П. А. К теории пластичности материалов, чувствительных к наводороживанию // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. № 2. С. 60–67.
9. Орехов А. В. Критерий оценки напряженно-деформируемого состояния SD-материалов // Междунар. науч. конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения»: тез. докл. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2018. С. 221–222.
10. Орехов А. В. Два критерия напряженно-деформируемого состояния твердого тела // XXIII Петерб. чтения по проблемам прочности, посвященные 100-летию ФТИ им. А. И. Иоффе и 110-летию со дня рождения чл.-корр. АН СССР А. В. Степанова. СПб.: Изд-во ВВМ, 2018. С. 208–210.
11. Orekhov A. V. Criterion for estimation of stress-deformed state of SD-materials // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 070028. DOI: 10.1063/1.5034703
12. Иванов В. А., Чемоданов Б. К., Медведев И. С. Математические основы теории автоматического регулирования. М.: Высшая школа, 1971. 808 с.

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.; принята к печати 14 июня 2018 г.

Контактная информация:

Орехов Андрей Владимирович — старший преподаватель; A\_V\_Orekhov@mail.ru

# Approximation-evaluation tests for a stress-strain state of deformable solids

A. V. Orekhov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Orekhov A. V. Approximation-evaluation tests for a stress-strain state of deformable solids. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 230–242. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.304>

When analyzing some applied problems, it is of interest to obtain certain statistical criteria. These criteria could determine the moment when a monotonically increasing quantity, given in the form of a table and whose analytical form is unknown, changes the linear increasing to the nonlinear one. In this paper, we consider “approximation-evaluation tests”, which allows us to determine the point, when the type of increase in the monotone sequence of numerical parameters of deformable solid, characterizing its stress-strain state, is changed from linear to parabolic. This point could be considered as a harbinger of the strength loss. This criterion is based on the comparison of the quadratic errors of the linear and the incomplete parabolic approximations. Approximating functions are constructed locally, not overall values of the sequence, but only over several of them. These points are located in the left half-neighborhood of the investigated point. An inverse problem is solved in which the critical values of the sequence are calculated, for which the quadratic errors of the linear and incomplete parabolic approximations are equal. The example shows that a simple comparison of finite differences cannot be used to determine the point at which a linear increase becomes parabolic.

*Keywords:* stress-strain state, least-squares method.

## References

1. Pestrikov V. M., Morozov Ye. M. *Mekhanika razrusheniya tverdykh tel* [Mechanics of destruction of solids]. Saint Petersburg, Professiya Publ., 2002, 320 p. (In Russian)
2. Terugulov I. G. *Soprotivleniye materialov i osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Resistance of materials and the foundations of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1964, 472 p. (In Russian)
3. Pavilaynen G. V., Yushin R. U. Analiz ucheta uprugoy transversal'noy izotropii i plasticheskoy anizotropii pri izgibe kruglykh plastin [Analysis of the account of elastic transversal isotropy and plastic anisotropy in the bending of circular plates]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2011, iss. 1, pp. 122–131. (In Russian)
4. Pavilaynen G. V., Yushin R. U. An approximate solution of elastic-plastic problem of circular strength different (SD) plates. *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics*. Abstracts of the International conference. Dedicated to the memory of professor V. F. Demyanov. Saint Petersburg, VVM Publ., 2017, pp. 207–209.
5. Pavilaynen G. V. Matematicheskoye modelirovaniye uprugo-plasticheskogo izgiba balki, material kotoroy obladayet efektom SD [Mathematical simulation of the elastic-plastic bending of a beam whose material has the SD effect]. *Trudy seminara “Komp'yuternyye metody v mekhanike sploshnoy sredy”. 2014–2015 gg.* [Proceedings of the seminar “Computer Methods in Continuum Mechanics”. 2014–2015]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2015, pp. 49–62. (In Russian)
6. Vansovich K. A. Model' rosta ustalostnykh poverkhnostnykh treshchin za tsikl «nagruzka—razgruzka» [The model of growth of fatigue surface cracks for the “load—unload” cycle]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omskiy scientific vestnik], 2017, no. 3(153), pp. 49–53. (In Russian)
7. Tikhomirov V. M. Rost treshchiny pri znakoperemennom tsikle nagruzheniya [Fissure growth under alternating loading cycle]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mathematics and Technical Physics], 2008, vol. 49, no. 5(291), pp. 190–198. (In Russian)
8. Treshchev A. A., Poltavets P. A. K teorii plastichnosti materialov, chuvstvitel'nykh k navodorozhivaniyu [On the theory of plasticity of materials sensitive to hydrogenation]. *Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii* [Problems of Machine-building and Automatization], 2006, no. 2, pp. 60–67. (In Russian)

9. Orekhov A. V. Kriteriy otsenki napryazhenno-deformiruyemogo sostoyaniya SD-materialov [Criterion for estimating the stress-strain state of SD materials]. *Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po mekhanike "Vos'myye Polyakhovskiy chteniya"*. Tezisy dokladov [International scientific conference on mechanics "Eight Polyakhovsky Readings". Thesis of paper]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2018, pp. 221–222. (In Russian)

10. Orekhov A. V. Dva kriteriya napryazhenno-deformiruyemogo sostoyaniya tverdogo tela [Two criteria for the stress-strain state of a solid]. *XXIII Peterburgskiy chteniya po problemam prochnosti, posvyashchennyye 100-letiyu FTI im. A. I. Ioffe i 110-letiyu so dnya rozhdeniya chl.-korr. AN SSSR A. V. Stepanova* [XXIII Petersburg readings on the problems of strength, dedicated to the 100th anniversary of the Ioffe Physics and Technical Institute and 110th anniversary from the date of birth of corresponding member of the USSR Academy of Sciences A. V. Stepanov]. Saint Petersburg, VVM Publ., 2018, pp. 208–210. (In Russian)

11. Orekhov A. V. Criterion for estimation of stress-deformed state of SD-materials. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, pp. 070028. DOI: 10.1063/1.5034703

12. Ivanov V. A., Chemodanov B. K., Medvedev I. S. *Matematicheskiye osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Mathematical foundations of the theory of automatic regulation]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1971, 808 p. (In Russian)

Author's information:

Andrey V. Orekhov — senior lecturer; A\_V\_Orekhov@mail.ru