ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 514.74
MSC 52A27, 49J15, 49J52

Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их приложения в теории управления

В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, А. А. Ершов

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН,
Российская Федерация, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Для цитирования: *Ушаков В. Н., Успенский А. А., Ершов А. А.* Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их приложения в теории управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 261–272. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307

В работе развивается техника исследования невыпуклых множеств, возникающих при описании эволюции волновых фронтов, построении обобщенных решений краевых задач для уравнений Гамильтона—Якоби и формировании разрешающих конструкций в задачах динамического управления. Получена оценка хаусдорфова расстояния между такими множествами и их выпуклыми оболочками, которая опирается на понятие меры невыпуклости α. Показано, что при малых α невыпуклые α-множества близки к выпуклым. Приведен пример решения задачи оптимального управления на основе α-множеств.

Ключевые слова: α-множество, выпуклая оболочка, хаусдорфово расстояние, управление, быстродействие, уравнение Гамильтона—Якоби.

Введение. Понятие α-множества было введено в начале 2000-х годов в работе [1], оно сформировалось при изучении множеств достижимости управляемых систем [2]. Множества достижимости, как правило, невыпуклы (см., например, [3]). Для одних систем они отличаются от выпуклых мало, для других — весьма ощутимо. В связи с этим возникла естественная потребность в наведении определенной классификации таких множеств по степени невыпуклости. Отметим, что есть другие классы обобщенно-выпуклых множеств, например α-паравыпуклые [4], функционально паравыпуклые [5], а также семейство слабовыпуклых множеств ([6] и др.) Очевидно существование некоторой монотонной функции $\varphi : [0, \pi] \to [0, 1]$ такой, что любое α-множество является $\varphi(\alpha)$-паравыпуклым. Нахождение указанной функции — отдельная задача, для решения которой может быть полезна полученная здесь оценка.

Данная работа посвящена изучению зависимости степени невыпуклости плоского α-множества M от его параметра α. Для частного случая, когда все «прогибы» границы представимы в виде графиков функций, показывается, что если α мало, то соответствующие α-множества близки к выпуклым множествам, а именно,

$$d(M, \operatorname{co} M) \leqslant \lambda(M) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние; $\lambda(M) = \sup\limits_{z, z_* \in M} ||z - z_*||$ — диаметр множества M.

Развиваемая техника исследования невыпуклых множеств, опирающаяся на понятие меры невыпуклости α, практически применяется при описании эволюции волновых фронтов [7], построении обобщенных решений краевых задач для уравнений Гамильтона—Якоби [8], конструировании функций оптимального результата в задачах управления [9, 10].

1. Оценка расстояния между α-множеством и его выпуклой оболочкой в частном случае.

1.1. Формулировка результата. Приведем определение α-множества из [11].

Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку в A.

Полагаем, что $\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\}$ — множество всех проекций $p(z^*)$ точки z^* на A; $\operatorname{co}\Omega_A(z^*)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_A(z^*)$; $\operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(z - z^*) : \lambda \geqslant 0, z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$; $\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение h_* и h^* из $\mathbb{R}^n$, $||h_*|| = \langle h_*, h^* \rangle^{1/2}$; $\angle(h_*, h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{||h_*|| ||h^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*; $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$; $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Определение 1. *Пусть $\alpha_A = \alpha$. Тогда множество A назовем α-множеством.*

Отметим, что 0-множество является обычным выпуклым множеством. К π-множествам относится кольцо или множество, состоящее из двух различных точек.

Определение 2. *Пусть M — множество в $\mathbb{R}^2$. Назовем лакуной участок границы $\gamma \subset \partial M$, гомеоморфный отрезку прямой и такой, что его крайние точки $\partial\gamma$ содержатся в $\partial \operatorname{co} M$, а его внутренние точки $\gamma \backslash \partial\gamma$ — в $\operatorname{int} \operatorname{co} M$.*

Целью п. 1 является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть M — α-множество ($\alpha < \pi$) в $\mathbb{R}^2$ такое, что все лакуны границы ∂M представимы в виде графиков непрерывных функций, для которых ось абсцисс параллельна отрезку, соединяющему крайние точки лакун.*

Тогда

$$d(M, \operatorname{co} M) \leqslant \lambda(M) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

1.2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *(О пересечении альфа-графика с вертикальной полосой.) Пусть $a \leqslant c < d \leqslant b$, $f \in C[a, b]$, $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, $\gamma = \{(x, y) : y = f(x), c \leqslant x \leqslant d\}$.*

Тогда

$$\alpha_\Gamma = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma} \alpha_\Gamma(z^*) \geqslant \alpha_\gamma = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma} \alpha_\gamma(z^*). \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как Γ — график однозначной функции, то $\alpha_\Gamma(z^*)$ всегда совпадает с величиной максимально возможного угла между двумя проекциями на Γ, выпущенными из точки z^*. То же верно и для γ.

Для доказательства неравенства (2) для каждой точки $O \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ найдем такую точку $O'' \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, что $\alpha_\gamma(O) \leqslant \alpha_\Gamma(O'')$.

Итак, возьмем произвольную точку $O \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma$. Если $\alpha_\gamma(O) = 0$, то в качестве O'' подойдет любая точка из $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$.

Пусть оказалось, что $\alpha_\gamma(O) > 0$. Тогда изучим следующие случаи.

Первый случай. Проекции точки O на γ также являются проекциями точки O на Γ. В таком случае в качестве точки O'' можно взять саму точку O.

Второй случай. Предположим, что это не так (рис. 1).

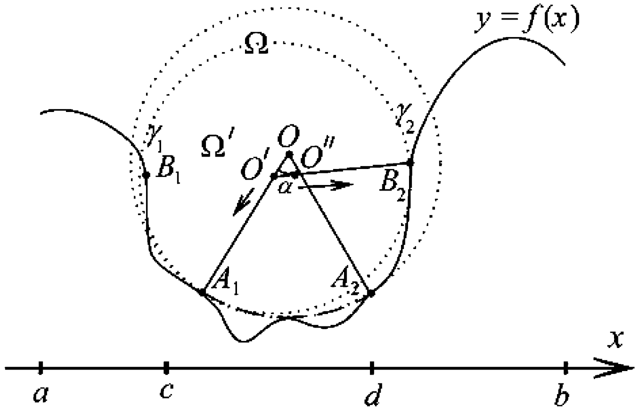

Рис. 1. Проекции точки O на γ и точки O'' на Γ

Рассмотрим график $\gamma = \{(x, y) : y = f(x), x \in [c, d]\}$. Пусть в некоторой точке O существует более одной проекции на γ. Обозначим величину максимального угла $\angle A_1OA_2$ между проекциями через α. Это означает, что существует круг Ω с центром в точке O и радиусом $|OA_1|$ такой, что $\operatorname{cl}\Omega$ не содержит никаких точек графика γ, кроме A_1, A_2 и, может быть, некоторых точек на дуге A_1A_2 (рис. 1).

Теперь покажем, что существует такая точка $O'' \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, имеющая проекции $O''B_1$ и $O''B_2$ на множество Γ (т. е. $B_1, B_2 \in \Gamma$) такие, что $\angle B_1O''B_2 \geqslant A_1OA_2$.

Действительно, множество $\Gamma \cap \operatorname{cl}\Omega$ не может быть расположено только на границе $\partial\Omega$ круга Ω, так как тогда мы находимся в рамках первого случая. Следовательно, множество $\Gamma \cap \operatorname{cl}\Omega$ размещено не только на $\partial\Omega$, т. е. $\rho(O, \Gamma) < |OA_1|$.

Без ограничения общности будем считать, что абсциссы точек A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению $x_{A_1} < x_{A_2}$. Обозначим через $\gamma_1 = \Gamma \cap \operatorname{cl}\Omega \cap \{(x, y) : x \leqslant x_{A_1}\}$, $\gamma_2 = \Gamma \cap \operatorname{cl}\Omega \cap \{(x, y) : x \geqslant x_{A_2}\}$. Заметим, что $\gamma_1, \gamma_2 \neq \varnothing$, так как $A_1 \in \gamma_1$, $A_2 \in \gamma_2$.

Поскольку $\rho(O, \Gamma) < |OA_1|$, то хотя бы одно из расстояний $\rho(O, \gamma_1)$, $\rho(O, \gamma_2)$ меньше радиуса круга Ω. Без ограничения общности будем считать, что расстояние $\rho(O, \gamma_2) < |OA_1|$. Возьмем точку $O' = O$ и будем сдвигать ее по направлению к точке A_1. Заметим, что круг Ω' с центром в точке O' и радиусом $|O'A_1|$ всегда будет лежать внутри круга Ω. Кроме того, в некоторый момент $\rho(O', \gamma_2) = |O'A_1|$. При этом должна существовать хотя бы одна точка $B_2 \in \gamma_2$ такая, что $\rho(O', \gamma_2) = |O'B_2|$. Зафиксируем какую-нибудь одну такую точку B_2. Докажем, что $\angle A_1O'B_2 \geqslant \angle A_1OA_2 = \alpha$.

Во-первых, заметим, что точки A_1, A_2 лежат либо не выше точки O, либо не ниже, иначе график перестает быть изображением однозначной функции. Без ограничения общности будем считать, что обе точки A_1, A_2 размещены не выше точки O.

Во-вторых, точка B_2 не может находиться внутри двух сегментов окружности Ω, заштрихованных на рис. 2, где точка A_2' является отражением точки A_2 относительно прямой A_1O, поскольку точки A_2' и B_2 всегда расположены по разные стороны от вертикальной прямой A_2A_2''.

Возможны две ситуации относительно расположения точек A_1, A_2 и вертикальной прямой v, проходящей через центр O круга Ω (рис. 2).

а *б*

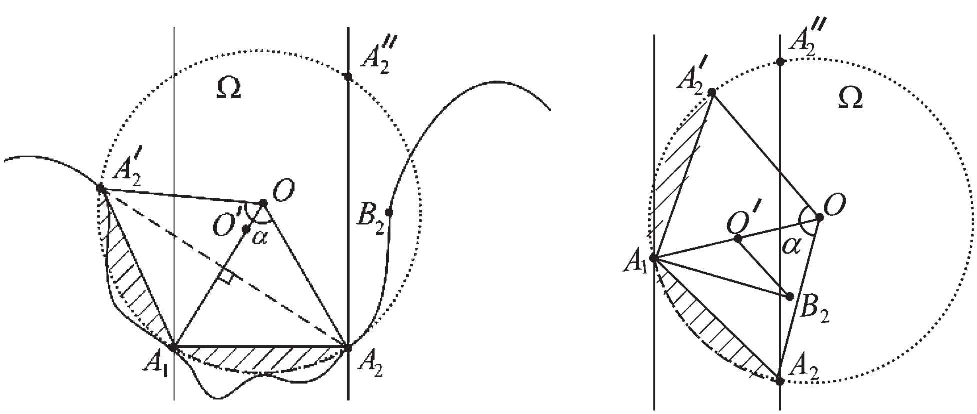

Рис. 2. Геометрическое место точек, в котором не может находиться точка B_2
а — ситуация 1; *б* — ситуация 2.

С и т у а ц и я 1. Точки A_1 и A_2 расположены по разные стороны от вертикали v (т. е. абциссы точек A_1, O и A_2 удовлетворяют соотношению $x_{A_1} < x_O < x_{A_2}$). В этой ситуации луч $O'B_2$ пересекает отрезок OA_2, и очевидно, что $\angle A_1O'B_2 > \angle A_1OA_2$.

С и т у а ц и я 2. Точки A_1 и A_2 размещены по одну сторону от v. Докажем от противного, что в данной ситуации также $\angle A_1O'B_2 \geqslant \angle A_1OA_2$. Предположим, что $\beta = \angle A_1O'B_2 < \angle A_1OA_2 = \alpha$. Как ранее было отмечено, точка B_1 не может находиться вне угла, образованного лучами A_1A_2 и A_1A_1' (заштрихованная область на рис. 2). Так как треугольник ΔA_1OA_2 равнобедренный, то $\angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Треугольник $\Delta A_1O'B_2$ также равнобедренный, поэтому $\angle O'A_1B_2 = \angle A_1B_2O' = \frac{\pi-\beta}{2}$. Значит, $\angle O'A_1B_2 > \angle OA_1B_2$. Но тогда точка B_2 будет вне угла, образованного лучами A_1A_2 и A_1A_1'. Следовательно, высказанное предположение неверно и $\angle A_1O'B_2 \geqslant \angle A_1OA_2$.

Рассмотрим теперь круг Ω' с центром в точке O' и радиусом $|O'A_1| = |O'B_2|$. По построению $\Omega' \subset \Omega$, $\gamma_2 \cup \mathrm{int}\Omega' = \varnothing$. Если также $\gamma_1 \cup \mathrm{int}\Omega' = \varnothing$, то из неравенства $\angle A_1O'B_2 \geqslant \angle A_1OA_2$ следует, что $\alpha_\gamma(O') \geqslant \alpha_\gamma(O)$.

Если оказалось, что $\gamma_1 \cup \mathrm{int}\Omega' \neq \varnothing$, то тем же образом будем сдвигать точку O' по направлению к точке B_2, пока не найдем новый центр круга O'', который касается множества γ_1 в некоторой точке B_1, с радиусом $|O''B_1| = |O''B_2|$. При этом будет выполняться неравенство

$$\angle B_1O''B_2 \geqslant \angle A_1O'B_2 \geqslant \alpha.$$

Таким образом, установили, что для каждой точки $O \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ можно найти такую точку $O'' \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, что $\alpha_\gamma(O) \leqslant \alpha_\Gamma(O'')$, и тем самым доказали неравенство (2). $\square$

Определим над- и подграфик функции f следующим образом:

$$\Gamma^+ = \operatorname{epi} f = \{(x, y) : y \geqslant f(x), a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$\Gamma^- = \operatorname{hypo} f = \{(x, y) : y \leqslant f(x), a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Тогда будет верно следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* $f \in C[a, b]$, $a \leqslant c < d \leqslant b$, $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, $\gamma = \{(x, y) : y = f(x), c \leqslant x \leqslant d\}$.

Тогда $\alpha_{\Gamma^-} \geqslant \alpha_{\gamma^-}$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $O \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma^-$. Заметим, что если $\alpha_{\Gamma^-}(O) > 0$, то $\Omega_{\Gamma^-}(O) \subset \Gamma$. Тем самым попадаем в ситуацию леммы 1. $\square$

Определение 3. *Пусть* $f \in C[a, b]$. *Сечением надграфика* Γ^+ *функции* f, *отвечающему значению* $y_0 \in \mathbb{R}$, *назовем множество* $S(y_0) = \{(x, y) : y = y_0\} \cap \Gamma^+$; *сечением внутренности надграфика* Γ^+ — *множество* $S_{int}(y_0) = \{(x, y) : y = y_0\} \cap \operatorname{int}\Gamma^+$, *его диаметром* —

$$\lambda(S_{int}(y_0)) = \sup_{x_1, x_2 : \{(x,y) : x_1 < x < x_2, y = y_0\} \subset S_{int}(y_0)} |x_2 - x_1|,$$

т. е. длину наибольшего интервала в сечении внутренности надграфика.

Заметим, что

$$\lambda(S_{int}(y)) = \max_{\substack{x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2) = y, \\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < y}} |x_2 - x_1|.$$

Кроме того, несложно показать, что если $\lambda(S_{int}(y)) = 0$, то $y \leqslant \min f(x)$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C[a, b]$, $f(a) = f(b)$, $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, $\alpha_{\Gamma^-} = \alpha < \pi$.

Тогда $f(a) - \min\limits_{[a,b]} f(x) \leqslant |b - a| \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.

Доказательство. Вначале докажем оценку

$$f(a) - \min_{[a,b]} f(x) \leqslant |b - a| \operatorname{tg} \frac{\alpha + \varepsilon}{2}, \tag{3}$$

где число ε таково, что $0 < \varepsilon < \pi - \alpha$.

Построим монотонно убывающую числовую последовательность $\{y_k\}$. Возьмем $y_1 = f(a)$. Если $\lambda(S_{int}(y_1)) = 0$, то $\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a)$ и утверждение леммы выполняется. Если $\lambda(S_{int}(y_1)) > 0$, то тогда выберем точки $A_1 = (a_1, y_1)$, $B_1 = (b_1, y_1)$ из Γ такие, что $a_1 < b_1$ и $f(x) < y_1$ для всех $x \in (a_1, b_1)$. (Тем самым отрезок $[A_1, B_1] \subset \operatorname{cl} S_{int}(y_1)$.)

Пусть точка $O_1 = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, y_1 + \dfrac{b_1 - a_1}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Тогда угол $\angle A_1O_1B_1 = \alpha + \varepsilon$. Через $B(O_1, |O_1A_1|) = \{(x, y) : \|(x, y) - O_1\| < |O_1A_1|\}$ обозначим открытый круг радиуса $|O_1A_1|$. В силу следствия (для участка между точками A_1 и B_1) и $\alpha_{\Gamma^-} < \alpha + \varepsilon$ вытекает, что $\Gamma \cap B(O_1, |O_1A_1|) \neq \varnothing$.

Выберем точку $C_2 = (x_2, y_2)$ из множества $\Gamma \cap \operatorname{cl} B(O_1, |O_1A_1|)$ с минимальной ординатой y_2 (рис. 3). Так как $f(x) < y_1$ для всех $x \in (a_1, b_1)$, то $y_2 < y_1$.

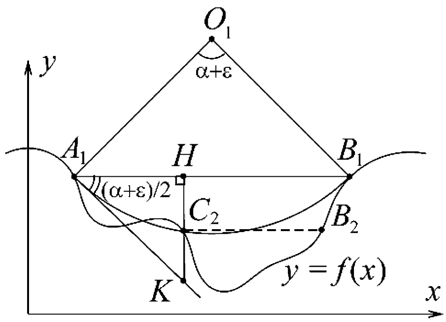

Рис. 3. Построение последовательности точек C_2, C_3, ...

Если $S_{int}(y_2) \cap \{a_1 \leqslant y \leqslant b_1\} \neq \varnothing$, то выберем некоторые точки $A_2 = (a_2, y_2)$, $B_2 = (b_2, y_2)$ из Γ такие, что $f(x) < y_2$ для всех $x \in (a_2, b_2)$. Возьмем точку $O_2 = \left(\dfrac{a_2+b_2}{2}, y_2 + \dfrac{b_2-a_2}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ и точку $C_3 = (x_3, y_3) = \operatorname*{argmin}\limits_{(x,y)\in\Gamma\cap \operatorname{cl} B(O_2, |O_2A_2|)} y$.

Продолжая действовать тем же образом, получим последовательность точек $\{C_n = (x_n, y_n)\}$. По построению $y_1 > y_2 > ...$

Предположим без ограничения общности, что $|A_1C_2| < |C_2B_2|$. Пусть A_1K — касательная к окружности с центром в точке O_1 и радиусом $|O_1A_1|$. Через точку C_2 проведем перпендикуляр HK_2 к отрезку A_1B_1. Здесь через K обозначим точку пересечения этого перпендикуляра и касательной.

Из прямоугольного треугольника ΔA_1HK получаем, что

$$\frac{|A_1H|}{|HK|} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Но $|A_1B_1| - |A_2B_2| \geqslant |A_1H|$, $|HK| \geqslant y_1 - y_2$. Таким образом,

$$|A_1B_1| - |A_2B_2| \geqslant (y_1 - y_2) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Аналогично,

$$|A_2B_2| - |A_3B_3| \geqslant (y_2 - y_3) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

$$...$$

Сложив неравенства (4), (5), ..., находим, что

$$|A_1B_1| - |A_nB_n| \geqslant (y_1 - y_n) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого n выполняется выражение

$$y_n \geqslant y_1 - |b-a|\operatorname{tg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Убывающая числовая последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу, следовательно, она сходится к некоторому значению y_0, причем, в силу (6), выполняется оценка

$$y_1 - y_0 \leqslant |b-a|\operatorname{tg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, заметим, что монотонно возрастающая последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, а монотонно убывающая последовательность $\{b_n\}$ — снизу. То есть $A_n \to A_0 = (a_0, y_0)$ и $B_n \to B_0 = (b_0, y_0)$ при $n \to \infty$.

Докажем от противного, что $S_{int}(y_0) \cap [a_0, b_0] = \varnothing$.

Действительно, предположим, что $S_{int}(y_0) \cap [a_0, b_0] \neq \varnothing$. Но тогда можно выбрать точки $A_* = (a_*, y_0)$, $B_* = (b_*, y_0)$ из Γ такие, что $b_* - a_* > 0$, $f(x) < y_0$ для всех $x \in (a_*, b_*)$. По точкам A_* и B_* построим точку $O_* = \left(\dfrac{a_* + b_*}{2}, y_0 + \dfrac{b_* - a_*}{2} \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)$ (так, чтобы $\angle A_* O_* B_* = \alpha + \varepsilon$). В силу того, что участок Γ между точками A_* и B_* является α-множеством, существует некоторая точка $C_* = (x_*, y_*)$ из множества $\Gamma \cap B(O_*, |O_* A_*|)$ и такая, что $y_* < y_0$. Рассмотрим последовательности $y_n \to y_0$, $A_n \to A_0$, $B_n \to B_0$. Поскольку $a_0 < a_*$, $b_0 > b^*$, $C_* \in \operatorname{int} B(O_0, |O_0 A_0|)$, то существует некоторое N такое, что $C_* \in \Gamma \cap B(O_N^*, |O_N^* A_N|)$, где $O_N = \left(\dfrac{a_N + b_N}{2}, y_N + \dfrac{b_N - a_N}{2} \times \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)$. Значит, числовая последовательность $\{y_n\}$ не может сходиться к $y_0 > y_*$. Вследствие полученного противоречия $S_{int}(y_0) \cap [a_0, b_0] = \varnothing$.

Теперь заметим, что на каждом шаге выбор точек A_k и B_k, принадлежащих границе $S_{int}(y_k)$, был достаточно произвольным. Если рассмотрим всевозможные такие последовательности, то придем к заключению, что все точки (x_n, y_n) из $\operatorname{epi}\Gamma$ удовлетворяют неравенству (6). Тем самым доказана оценка (3). Переходя в неравенстве (3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение леммы 2. $\square$

1.3. Доказательство теоремы. Рассмотрим множества M и $\operatorname{co} M$. Заметим, что M — односвязное множество, так как $\alpha_M < \pi$. Следовательно, ∂M состоит из совокупности участков, на которых она совпадает с $\partial \operatorname{co} M$, и так называемых лакун. Именно на лакунах возможно отдаление множеств M и $\operatorname{co} M$ в хаусдорфовой метрике. Пусть участок границы между точками P_1 и P_2 — одна из таких лакун (рис. 4).

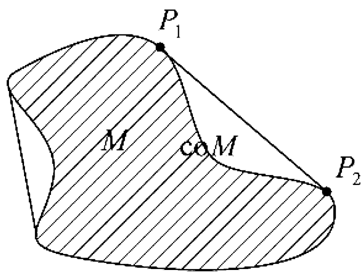

Рис. 4. Множество M и его выпуклая оболочка $\operatorname{co} M$

Заметим, что множество M лежит по одну сторону от прямой P_1P_2, в противном случае точки P_1, P_2 не были бы крайними точками лакуны.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy такую, чтобы ось Ox была параллельной P_1P_2, а ось Oy была направлена от множества M. Пусть в данной системе координат точки $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_1)$. По условию теоремы участок границы ∂M между точками P_1P_2 представим в виде графика $\Gamma = \{(x, y) : y \leqslant f(x), x_1 < x < x_2\}$ некоторой непрерывной функции $f(x)$.

Вследствие того, что все точки множества M лежат ниже прямой P_1P_2, следует, что $\Gamma^- = \operatorname{hypo} f$ является α-множеством, в противном случае множество M — не α-множество.

При этом длина $|P_1P_2| \leqslant \lambda(M)$ для любых $P_1, P_2 \in \partial M$, где $\lambda(M)$ — диаметр множества M.

В силу леммы 2, выполняется следующая оценка для прогиба границы на участке между точками P_1 и P_2:

$$y_1 - \min_{[x_1,x_2]} f(x) \leqslant |x_2 - x_1| \mathrm{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Здесь $|x_2 - x_1| \leqslant \lambda(M)$. Заметим также, что хаусдорфово расстояние $d(M, \mathrm{co}\, M)$ не превосходит максимального прогиба границы ∂M.

Таким образом, теорема доказана. $\square$

2. α-множества в теории оптимального управления. Эффективность разрабатываемых подходов при изучении невыпуклых множеств покажем на примере построения функции оптимального результата в задаче управления по быстродействию для круговой индикатрисы скоростей

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1, \\ \dot{y} = v_2, \end{cases} \tag{7}$$

$v = (v_1, v_2)$, $||v|| \leqslant 1$, с целевым замкнутым множеством $M \subset \mathbb{R}^2$, имеющим нетривиальную геометрию.

Отметим, что $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash M$, является минимаксным решением [12] краевой задачи Дирихле для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана

$$\min_{v:||v|| \leqslant 1} \big\langle v, \nabla u(x, y) \big\rangle + 1 = 0, \quad u\big|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Здесь $\nabla u(x, y) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ — градиент функции $u(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash M$. Краевое условие определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Структура функции оптимального результата для задачи управления с динамикой (7), как, впрочем, и структура минимаксного решения задачи (8), известна [8]:

$$u = \rho((x, y), M), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash M,$$

где $\rho((x, y), M)$ — евклидово расстояние от точки (x, y) до замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Функция $u = \rho((x, y), M)$ является супердифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R}^2 \backslash M$ (см. [13]).

Примем в качестве целевого множества в задаче управления двухкомпонентное множество

$$M = M_1 \cup M_2,$$

в котором первая компонента M_1 — двухзвенная ломаная с узлами в точках $A_1 = (0, 2)$, $A_2 = (0, 0)$, $A_3 = (3, 0)$, звеньями ломаной M_1 являются отрезки $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, вторая компонента $M_2 = \{A_4\}$ — одноточечное множество, $A_4 = (1, 3)$.

Синтезируем функцию оптимального результата $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash M$, осуществив надлежащим образом разбиение фазового пространства. Для этого рассмотрим задачу параметрического программирования

$$\inf_{m \in M_1} \rho(z, m) = \rho(z, A_4), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash M. \tag{9}$$

Решением задачи (9) является кривая $\Gamma = \mathrm{gr} f$ (рис. 5), равноудаленная от множеств M_1 и M_2. Здесь

$$
f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leqslant 1, \\ 3-\sqrt{2x-1}, & 1 < x < 4-\sqrt{6}, \\ \dfrac{x^2-2x+10}{6}, & 4-\sqrt{6} \leqslant x \leqslant 3, \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6}, & x > 3. \end{cases}
$$

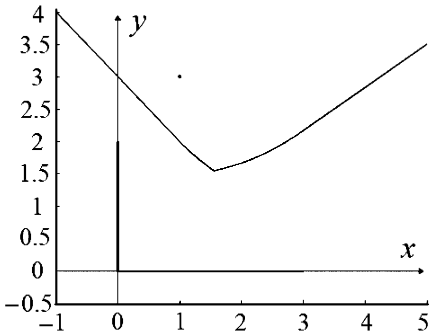

Рис. 5. α-гиперплоскость, сильно разделяющая компоненты M_1 и M_2 целевого множества

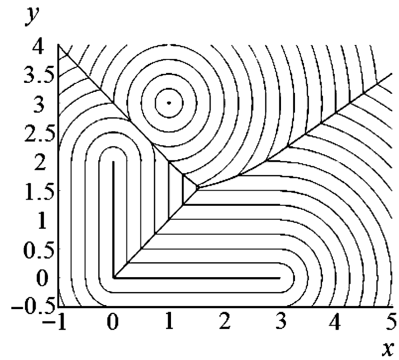

Рис. 6. Карта линий уровня функции оптимального результата

График $\Gamma = \mathrm{gr} f$ является α-прямой (α-гиперплоскостью), сильно отделяющей (см. [11]) множества M_1 и M_2. Мера невыпуклости подграфика выпуклой функции определяется линейными функциями, участвующими в склейке. Угловая величина $\alpha = \arccos(1/\sqrt{26}) \approx 1.3734$. Кривая $\Gamma = \mathrm{gr} f$ гомеоморфна прямой и делит плоскость на две α-полуплоскости: $\Phi_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y < f(x)\}$ и $\Phi_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > f(x)\}$. В рассматриваемой задаче функция $u(x,y) = \rho((x,y), M)$, и поскольку α-прямая $\Gamma = \mathrm{gr} f$ равноудалена от компонент целевого множества, то

$$
u(x,y) = \begin{cases} \rho((x,y), M_1), & (x,y) \in \Phi_1, \\ \rho((x,y), M_2), & (x,y) \in \Phi_2 \cup \Gamma. \end{cases}
$$

Основную проблему при конструировании решения составляет построение сингулярного множества — биссектрисы (см. [14]) целевого множества M. Для преодоления этой проблемы применим технику решения задач быстродействия, опирающуюся на свойства множеств симметрии [9, 15]. Невыпуклая компонента M_2 целевого множества M имеет одну псевдовершину $A_2 = (0,0)$ — точку негладкой склейки звеньев ломаной. Псевдовершина порождает ветвь сингулярного множества функции оптимального результата, совпадающую с открытым отрезком L_1 биссектрисы первого координатного угла. Крайними точками L_1 являются $A_2 = (0,0)$ и $A_5 = (4-\sqrt{6}, 4-\sqrt{6})$. Таким образом, в рассматриваемой задаче сингулярное множество $L = L_1 \cup \Gamma$. При этом точка A_5 сочленения кривых L_1 и Γ — точка бифуркации. Это единственная точка сингулярного множества, имеющая не две, а три ближайшие точки на целевом множестве M.

На рис. 6 представлена геометрия сингулярного множества и сечений множества управляемости. Отметим, что с ростом расстояния до целевого множества мера невыпуклости α соответствующих линий уровня функции оптимального результата не увеличивается (см. [11, теорема 2]).

Заключение. Ценность полученной в п. 1 оценки (1) состоит в том, что при малых α можно заменять невыпуклые α-множества выпуклыми с точностью до небольшой погрешности. Аналогичным образом часто применяется известная теорема Шепли—Фолкмана [16].

Литература

1. *Ушаков В. Н., Успенский А. А., Фомин А. Н.* α-множества и их свойства. Екатеринбург: Ин-т математики и механики Урал. отд. РАН, 2004. 62 с.
2. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления / пер. с англ. Л. Л. Леонтьевой; под ред. Я. Н. Ройтенберга. М.: Наука, 1972. 574 с. (*Li E. B., Markus L.* Foundation on optimal control theory.)
3. *Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. Т. 42, № 3. С. 8–16. DOI: 10.1134/S1064230706030075
4. *Michael E.* Paraconvex sets // Math. Scand. 1959. Vol. 7, N 2. P. 312–315. DOI: 10.7146/math.scand.a-10583
5. *Семенов П. В.* Функционально паравыпуклые множества // Мат. заметки. 1993. Т. 54. Вып. 6. С. 74–81.
6. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
7. *Успенский А. А., Лебедев П. Д.* Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Математика. 2008. Т. 52, № 3. С. 27–37. DOI: 10.3103/S1066369X08030031
8. *Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Ин-та математики и механики Урал. отд. РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191. DOI: 10.1134/ S0081543808060175
9. *Успенский А. А., Лебедев П. Д.* Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 79, № 7. С. 50–57. DOI: 10.1134/S0005117909070054
10. *Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д.* Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 157–167.
11. *Ушаков В. Н., Успенский А. А.* α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 95–120. DOI: 10.20537/vm160109
12. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
13. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
14. *Успенский А. А., Лебедев П. Д.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика: Труды факультета высшей математики и кибернетики Моск. гос. ун-та им. М. В. Ломоносова. 2007. № 27. С. 65–79.
15. *Успенский А. А.* Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Ин-та математики и механики Урал. отд. РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 250–263.
16. *Starr R. M.* Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // Econometrica. 1969. Vol. 37. Iss. 1. P. 25–38. DOI: 10.2307/1909201

Статья поступила в редакцию 21 января 2018 г.; принята к печати 14 июня 2018 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Ушаков Владимир Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр.; ushak@imm.uran.ru

Успенский Александр Александрович — д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотр.; uspen@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; ale10919@yandex.ru

Alpha-sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their applications in control theory

V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, A. A. Ershov

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of Russian Academy Sciences, 16, S. Kovalevskaya ul., Yekaterinburg, 620990, Russian Federation

For citation: Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Ershov A. A. Alpha-sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their applications in control theory. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 261–272. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307

In this paper, a technique for investigating nonconvex sets that occur when describing the evolution of wave fronts, in the construction of generalized solutions of boundary value problems for equations of Hamilton—Jacobi type, in the formation of resolving structures in the problems of dynamic control is developed. An estimate is obtained for the Hausdorff distance between such sets and their convex hulls. The estimate is based on the concept of a measure of nonconvexity α. It is shown that for small α, nonconvex α-sets are close to convex. An example of a solution of the optimal control problem on the basis of α-sets is give.

Keywords: α-set, convex hull, Hausdorff distance, control, performance, Hamilton—Jacobi equation.

References

1. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Fomin A. N. *α-mnojestva i ih svoistva* [*α-sets and their properties*]. Yekaterinburg, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2004, 62 p. (In Russian).

2. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York etc., Wiley Press, 1967, 576 p. (Russ. end.: Lee E. B., Markus L. *Osnovy teorii optimal'nogo upravlenija.* Moscow, Nauka Publ., 1972, 574 p.)

3. Patsko V. S., Pyatko S. G., Fedotov A. A. Trehmernoe mnozhestvo dostizhimosti nelinejnoj upravljaemoj sistemy [Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Systems Control*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 8–16. (In Russian) DOI: 10.1134/S1064230706030075

4. Michael E. Paraconvex sets. *Math. Scand.*, 1959, vol. 7, no. 2, pp. 312–315. DOI: 10.7146/math.scand.a-10583

5. Semenov P. V. Funkcional'no paravypuklye mnozhestva [Functionally paraconvex sets]. *Mathematical Notes*, 1993, vol. 54, iss. 6, pp. 1236–1240. (In Russian)

6. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funkcii: teorija i prilozhenija* [*Weak convex sets and functions: theory and applications*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 352 p. (In Russian)

7. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Geometrija i asimptotika volnovyh frontov [Geometry and asymptotics of wavefronts]. *Proceedings of Higher educational Institutions. Mathematics*, 2008, vol. 52, no. 3, pp. 27–37. (In Russian) DOI: 10.3103/S1066369X08030031

8. Lebedev P. D., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Postroenie minimaksnogo reshenija uravnenija tipa jejkonala [Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 182–191. (In Russian) DOI: 10.1134/S0081543808060175

9. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Postroenie funkcii optimal'nogo rezul'tata v zadache bystrodejstvija na osnove mnozhestva simmetrii [Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set]. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, iss. 7, pp. 50–57. (In Russian) DOI: 10.1134/S0005117909070054

10. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Geometrija singuljarnyh krivyh dlja odnogo klassa zadach bystrodejstvija [Geometry of singular curves of a class of time-optimal problems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2013, iss. 3, pp. 157–167. (In Russian)

11. Ushakov V. N., Uspenskii A. A. α-mnozhestva v konechnomernyh evklidovyh prostranstvah i ih svojstva [α-sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties]. *Vestnik of Udmurtsk*

University. Mathematics. Mekhanics. Computer Sciences, 2016, vol. 26, iss. 1, pp. 95–120. (In Russian) DOI: 10.20537/vm160109

12. Subbotin A. I. *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona—Yakobi* [*Minimax inequalities and the Hamilton—Jacobi equations*]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 214 p. (In Russian)

13. Dem'yanov V. F., Vasil'yev L. V. *Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya* [*Nondifferentiable optimization*]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 384 p. (In Russian)

14. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Analiticheskoe i chislennoe konstruirovanie funkcii optimal'nogo rezul'tata dlja odnogo klassa zadach bystrodejstvija [Analytical and numerical design of the optimal result function for one class of performance problems]. *Applied Mathematics and Informatics. Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics M. V. Lomonosov Moscow State University*, 2007, no. 27, pp. 65–79. (In Russian)

15. Uspenskii A. A. Neobhodimye uslovija sushhestvovanija psevdovershin kraevogo mnozhestva v zadache Dirihle dlja uravnenija jejkonala [Necessary conditions for the existence of pseudo-vertices of a boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation]. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 250–263. (In Russian)

16. Starr R. M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica*, 1969, vol. 37, iss. 1, pp. 25–38. DOI: 10.2307/1909201

Author's information:

Vladimir N. Ushakov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; ushak@imm.uran.ru

Aleksander A. Uspenskii — Dr. Sci. in Physics and Mathematics; uspen@imm.uran.ru

Aleksander A. Ershov — PhD Sci. in Physics and Mathematics; ale10919@yandex.ru