УДК 531.36
MSC 74G55

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2019. Т. 15. Вып. 2

Исследование условий предельной ограниченности движений механических систем на основе декомпозиции*

А. Ю. Александров[1], *Й. Жан*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2] Пекинский технологический университет, Китайская Народная Республика, 100124, Пекин, ул. Пинглеюан, 100

Для цитирования: *Александров А. Ю., Жан Й.* Исследование условий предельной ограниченности движений механических систем на основе декомпозиции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 2. С. 173–186. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.202

Исследуется механическая система, находящаяся под действием линейных скоростных сил и нелинейных однородных позиционных сил. Требуется получить условия предельной ограниченности движений этой системы. Для решения поставленной задачи применяется метод декомпозиции. Вместо исходной системы уравнений второго порядка предлагается рассматривать две вспомогательные подсистемы первого порядка. Следует отметить, что одна из них линейна, а другая является однородной. С помощью прямого метода Ляпунова доказано, что если нулевые решения изолированных подсистем асимптотически устойчивы, а порядок однородности позиционных сил меньше единицы, то движения исходной системы равномерно предельно ограничены. Далее определяются условия, при выполнении которых возмущения не нарушают предельной ограниченности движений. Доказана теорема о равномерной предельной ограниченности по нелинейному приближению. Показано, что для некоторых типов нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями условия указанной теоремы могут быть слабее. Исследована также механическая система с переключающимися нелинейными позиционными силами. Для соответствующего семейства систем построена общая функция Ляпунова. Ее существование гарантирует, что движения рассматриваемой гибридной системы равномерно предельно ограничены при любом допустимом законе переключения. Приводятся примеры, демонстрирующие эффективности разработанных подходов.

Ключевые слова: механическая система, предельная ограниченность, однородная функция, декомпозиция, прямой метод Ляпунова.

Одним из основных методов анализа динамики сложных систем является метод декомпозиции [1–3]. Он широко и эффективно применяется для исследования асимптотического поведения движений механических систем [3–9]. В работах [4, 5] с его помощью были получены условия асимптотической устойчивости линейных гироскопических систем с положительным параметром при скоростных или гироскопических силах. Вместо исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка рассматривались две изолированные подсистемы той же размерности, но уже первого порядка (нутационная и прецессионная). С использованием первого метода Ляпуно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146-а), Санкт-Петербургского государственного университета (Id проекта 37569826), Национального фонда естественных наук Китая (грант № 61803007) и Объединенного фонда железнодорожного транспорта и технологии управления движением Пекинского фонда естествознания (грант № L171001).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

ва и разложения корней характеристических уравнений в ряды по отрицательным степеням параметра было доказано, что если указанные подсистемы асимптотически устойчивы, то при достаточно больших значениях параметра можно гарантировать асимптотическую устойчивость исходной системы. Однако следует отметить, что такой подход неприменим к механическим системам с нестационарными или существенно нелинейными силами.

В статье [10] был предложен другой способ обоснования декомпозиции линейных гироскопических систем. Он базируется на применении прямого метода Ляпунова и позволяет получить условия устойчивости для нелинейных и нестационарных систем. В частности, в работах [11, 12] этот способ использовался для анализа устойчивости линейных механических систем с переключающимися позиционными силами, а в [13, 14] — механических систем с однородными и нелинейными неоднородными позиционными силами.

Наряду с устойчивостью важным требованием, предъявляемым при решении задач управления механическими системами, является ограниченность их движений. С практической точки зрения особый интерес представляет случай, когда движения обладают свойством предельной ограниченности [15, 16], т. е. когда в фазовом пространстве изучаемой системы существует ограниченная область такая, что каждое решение за конечное время попадает в нее и остается там при дальнейшем возрастании времени.

В статье [17] с помощью метода декомпозиции и подхода, представленного в [10], были определены достаточные условия предельной ограниченности для механических систем с линейными диссипативными и гироскопическими силами и существенно нелинейными позиционными силами. Однако следует отметить, что в указанной работе предполагалось наличие положительного параметра при векторе гироскопических сил, причем приведенные в ней результаты справедливы только при достаточно больших значениях этого параметра.

Основная цель настоящей статьи — показать, что для механических систем с однородными позиционными силами для обоснования декомпозиции и доказательства предельной ограниченности движений нет необходимости использовать большой параметр. Доминирование сил определенной категории может обеспечиваться за счет порядков однородности. Покажем также, что предельная ограниченность может гарантироваться при менее жестких условиях на позиционные силы по сравнению с условиями, которые накладывались в [17]. Кроме того, исследуем условия предельной ограниченности для возмущенных систем и систем с переключающимися позиционными силами.

Постановка задачи. Пусть движения механической системы описываются уравнениями

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Q(q) = 0, \tag{1}$$

в которых q и $\dot{q}$ — n-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей соответственно, A и B — постоянные неособые матрицы, компоненты вектора позиционных сил $Q(q)$ представляют собой непрерывные при $q \in \mathbb{R}^n$ однородные функции порядка $\mu > 0$.

Произведем декомпозицию исследуемой системы. Наряду с системой (1), состоящей из уравнений второго порядка, рассмотрим две изолированные подсистемы уравнений первого порядка

$$B\dot{y} + Q(y) = 0, \tag{2}$$

$$A\dot{z} + Bz = 0. \tag{3}$$

Нужно определить условия, при выполнении которых на основании анализа динамики изолированных подсистем можно сделать выводы об асимптотическом поведении движений исходной системы (1).

В работе [4] данная задача решалась для системы (1) с линейными позиционными силами ($\mu = 1$). Для обоснования возможности такой декомпозиции требовалось, чтобы скоростные силы были доминирующими (предполагалось наличие большого параметра в качестве множителя при векторе этих сил).

В статьях [12–14] рассматривался случай, когда позиционные силы являются однородными порядка $\mu > 1$. Было доказано, что из асимптотической устойчивости нулевых решений подсистем (2) и (3) следует асимптотическая устойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1). По сравнению со случаем линейных позиционных сил принципиальная особенность результатов, полученных в [12–14], состоит в том, что для их доказательства не требовалось наличия в изучаемой системе большого параметра.

В настоящей работе исследуем условия ограниченности движений системы (1).

Определение [16]. *Движения системы* (1) *равномерно предельно ограничены, если существует число* $\Delta_1 > 0$ *такое, что для любого* $\Delta_2 > 0$ *величину* $T > 0$ *можно выбрать так, чтобы для решений* $q(t)$ *этой системы с начальными данными, удовлетворяющими условиям* $t_0 \geqslant 0$, $\|q(t_0)\| < \Delta_2$, $\|\dot{q}(t_0)\| < \Delta_2$, *при всех* $t \geqslant t_0 + T$ *выполнялось неравенство* $\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\| < \Delta_1$.

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Следует отметить, что для автономной системы равномерная предельная ограниченность приводит к равномерной ограниченности решений.

Покажем, что в случае, когда $0 < \mu < 1$, метод декомпозиции позволяет получить достаточные условия равномерной предельной ограниченности для изучаемой системы.

Заметим, что однородные функции порядка однородности, меньшего единицы, широко применяются в современной теории управления в качестве стабилизирующих управлений, обеспечивающих выход возмущенных решений на программные режимы за конечное время (см. [18–20]).

Достаточные условия предельной ограниченности. Для решения поставленной задачи будем использовать теорему Йосидзавы о предельной ограниченности решений нелинейных систем (см. [15, с. 290]) и подход, предложенный в работе [10].

Теорема 1. *Пусть* $0 < \mu < 1$ *и нулевые решения подсистем* (2), (3) *асимптотически устойчивы. Тогда движения системы* (1) *равномерно предельно ограничены.*

Доказательство. Перейдем к новым переменным по формулам

$$y = q + B^{-1}A\dot{q}, \qquad z = \dot{q}. \tag{4}$$

С помощью такой замены система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} B\dot{y} &= -Q(y - B^{-1}Az), \\ A\dot{z} &= -Bz - Q(y - B^{-1}Az). \end{aligned} \tag{5}$$

Систему (5) можно рассматривать как сложную систему, описывающую взаимодействие изолированных подсистем (2) и (3).

В работах [21, 22] доказано, что если нулевые решения подсистем (2), (3) асимптотически устойчивы, то для этих подсистем найдутся непрерывно дифференцируемые при $y, z \in \mathbb{R}^n$ положительно однородные функции Ляпунова $V_1(y)$ и $V_2(z)$ порядка ν_1

и ν_2 соответственно, удовлетворяющие требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом в качестве ν_1 и ν_2 можно выбирать любые числа, бóльшие единицы.

Для системы (5) функцию Ляпунова определим по формуле

$$V(y,z) = \varepsilon V_1(y) + V_2(z), \tag{6}$$

где ε — положительный параметр. Тогда (см. [21, с. 112–118]) при всех $y, z \in \mathbb{R}^n$ будут справедливы соотношения

$$\varepsilon\alpha_1\|y\|^{\nu_1} + \alpha_2\|z\|^{\nu_2} \leqslant V(y,z) \leqslant \varepsilon\alpha_3\|y\|^{\nu_1} + \alpha_4\|z\|^{\nu_2},$$

$$\begin{aligned}\dot V\big|_{(5)} = &-\varepsilon\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top} B^{-1}Q(y) + \varepsilon\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top} B^{-1}\left(Q(y) - Q(y - B^{-1}Az)\right) - \\ &- \left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^{\top} A^{-1}Bz - \left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^{\top} A^{-1}Q(y - B^{-1}Az) \leqslant \\ &\leqslant -\varepsilon\alpha_5\|y\|^{\nu_1+\mu-1} - \alpha_6\|z\|^{\nu_2} + \alpha_7\|z\|^{\nu_2+\mu-1} + \\ &+ \alpha_8\|z\|^{\nu_2-1}\|y\|^{\mu} + \varepsilon\alpha_9\|y\|^{\nu_1-1}\left\|Q(y) - Q(y - B^{-1}Az)\right\|,\end{aligned}$$

в которых $\alpha_1, \ldots, \alpha_9$ — положительные постоянные.

Если $y \neq 0$, то

$$\left\|Q(y) - Q(y - B^{-1}Az)\right\| = \|y\|^{\mu}\left\|Q\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - Q\left(\frac{y}{\|y\|} - B^{-1}A\frac{z}{\|y\|}\right)\right\|.$$

Значит, существует число $\delta > 0$ такое, что при $\|z\| < \delta\|y\|$ имеем оценку

$$\alpha_9\left\|Q\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - Q\left(\frac{y}{\|y\|} - B^{-1}A\frac{z}{\|y\|}\right)\right\| < \frac{1}{4}\alpha_5, \tag{7}$$

а при $\|z\| \geqslant \delta\|y\|$ справедлива оценка

$$\left\|Q(y) - Q(y - B^{-1}Az)\right\| \leqslant \beta\|z\|^{\mu}, \qquad \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Используя неравенства (7), (8), а также свойства однородных функций (см. [21]), получаем: если

$$\mu \leqslant \frac{\nu_1 + \mu - 1}{\nu_2} < 1, \tag{9}$$

то найдутся положительные числа ε и Δ такие, что при $\|y\| + \|z\| \geqslant \Delta$ будет выполнено соотношение

$$\dot V\big|_{(5)} \leqslant -\frac{1}{2}\left(\varepsilon\alpha_5\|y\|^{\nu_1+\mu-1} + \alpha_6\|z\|^{\nu_2}\right).$$

Таким образом, функция Ляпунова (6) будет удовлетворять требованиям теоремы Йосидзавы о равномерной предельной ограниченности.

Учитывая свойства преобразования (4), приходим к выводу, что движения системы (1) равномерно предельно ограничены. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Используя функцию Ляпунова, построенную при доказательстве теоремы 1, и применяя известные подходы (см. [15, 16]), для системы (1) можно

получить оценки области предельной ограниченности и времени попадания решений в эту область.

Пример 1. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы на плоскости. Пусть $q = (q_1, q_2)^\top$ и $\dot q = (\dot q_1, \dot q_2)^\top$ — координаты и скорости точки.

Будем считать, что уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\ddot q_1 + \dot q_1 + q_1^\mu - 2q_2^\mu = 0,\\ &\ddot q_2 + \dot q_2 + 2q_1^\mu + q_2^\mu = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где μ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

Нетрудно проверить, что при $\mu = 1$ система (10) неустойчива. Значит, ее решения не являются предельно ограниченными.

Опишем случай, когда $\mu = 1/3$. Выписав подсистемы (2) и (3), соответствующие уравнениям (10), имеем

$$\dot y_1 + y_1^{1/3} - 2y_2^{1/3} = 0, \qquad \dot y_2 + 2y_1^{1/3} + y_2^{1/3} = 0,$$

$$\dot z_1 + z_1 = 0, \qquad \dot z_2 + z_2 = 0.$$

Нулевые решения этих подсистем асимптотически устойчивы, а однородные функции Ляпунова для них можно определить по формулам

$$V_1(y) = y_1^{4/3} + y_2^{4/3}, \quad V_2(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2).$$

Здесь $y = (y_1, y_2)^\top$, $z = (z_1, z_2)^\top$.

Применяя теорему 1, получаем, что движения системы (10) равномерно предельно ограничены.

Далее оценим область предельной ограниченности. Для этого с помощью замены переменных $y = q + \dot q$, $z = \dot q$ приведем уравнения (10) к виду

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= -y_1^{1/3} + 2y_2^{1/3} - \left((y_1 - z_1)^{1/3} - y_1^{1/3}\right) + 2\left((y_2 - z_2)^{1/3} - y_2^{1/3}\right),\\ \dot y_2 &= -2y_1^{1/3} - y_2^{1/3} - 2\left((y_1 - z_1)^{1/3} - y_1^{1/3}\right) - \left((y_2 - z_2)^{1/3} - y_2^{1/3}\right),\\ \dot z_1 &= -z_1 - (y_1 - z_1)^{1/3} + 2(y_2 - z_2)^{1/3},\\ \dot z_2 &= -z_2 - 2(y_1 - z_1)^{1/3} - (y_2 - z_2)^{1/3}. \end{aligned} \tag{11}$$

В качестве функции Ляпунова для системы (11) выбираем функцию

$$V(y, z) = \frac{15}{4}\left(y_1^{4/3} + y_2^{4/3}\right) + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2).$$

Тогда $\nu_1 = 4/3$, $\nu_2 = 2$, и условие (9) выполнено.

Дифференцируя функцию $V(y, z)$ в силу системы (11), получаем

$$\begin{aligned} \dot V\big|_{(11)} = &-z_1^2 - z_2^2 - 5\left(y_1^{2/3} + y_2^{2/3}\right) - z_1(y_1 - z_1)^{1/3} + 2z_1(y_2 - z_2)^{1/3} - 2z_2(y_1 - z_1)^{1/3} -\\ &-z_2(y_2 - z_2)^{1/3} - 5y_1^{1/3}\left((y_1 - z_1)^{1/3} - y_1^{1/3}\right) + 10y_1^{1/3}\left((y_2 - z_2)^{1/3} - y_2^{1/3}\right) -\\ &-10y_2^{1/3}\left((y_1 - z_1)^{1/3} - y_1^{1/3}\right) - 5y_2^{1/3}\left((y_2 - z_2)^{1/3} - y_2^{1/3}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что при любых значениях y_1, y_2, z_1, z_2 справедливы неравенства

$$|y_i - z_i|^{1/3} \leqslant |y_i|^{1/3} + |z_i|^{1/3}, \quad \left|(y_i - z_i)^{1/3} - y_i^{1/3}\right| \leqslant 2|z_i|^{1/3}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\dot{V}\big|_{(11)} \leqslant -z_1^2 - z_2^2 - 5\left(y_1^{2/3} + y_2^{2/3}\right) + |z_1|^{4/3} + |z_2|^{4/3} + 2|z_1^{1/3} z_2| + 2|z_2^{1/3} z_1| + |z_1 y_1^{1/3}| +$$

$$+ |z_2 y_2^{1/3}| + 2|z_1 y_2^{1/3}| + 2|z_2 y_1^{1/3}| + 10|z_1^{1/3} y_1^{1/3}| + 20|z_1^{1/3} y_2^{1/3}| + 20|z_1^{1/3} y_1^{1/3}| + 10|z_2^{1/3} y_2^{1/3}|.$$

При всех $y, z \in \mathbb{R}^2$ имеет место оценка

$$\dot{V}\big|_{(11)} \leqslant -\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2 + y_1^{2/3} + y_2^{2/3}\right) + 14\left(z_1^2 + z_2^2 + y_1^{2/3} + y_2^{2/3}\right)^{2/3}.$$

Значит, при $z_1^2 + z_2^2 + y_1^{2/3} + y_2^{2/3} > 28^3$ производная функции $V(y, z)$ в силу системы (11) отрицательна. Таким образом (см. [15, 16]), множество

$$G = \left\{q, \dot{q} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{15}{4}\left((q_1 + \dot{q}_1)^{4/3} + (q_2 + \dot{q}_2)^{4/3}\right) + \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) < 1280\right\}$$

содержит область предельной ограниченности системы (10).

Условия предельной ограниченности для возмущенных систем. Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Q(q) = \Phi(t, q, \dot{q}). \tag{12}$$

Здесь вектор-функция $\Phi(t, q, \dot{q})$ задана и непрерывна при $t \geqslant 0, \;\; q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$. Требуется определить условия, при выполнении которых возмущения не нарушают предельной ограниченности движений.

Будем предполагать, что существуют положительные числа $\eta, \sigma, \gamma, \tilde{\Delta}$ такие, что в области $t \geqslant 0$, $\|q\| + \|\dot{q}\| > \tilde{\Delta}$ имеет место оценка

$$\|\Phi(t, q, \dot{q})\| \leqslant \eta\left(\|q\|^\sigma + \|\dot{q}\|^\gamma\right).$$

Теорема 2. *Пусть $0 < \mu < 1$ и нулевые решения подсистем* (2), (3) *асимптотически устойчивы. Если $\sigma < \mu$, $\gamma < 1$, то движения системы* (12) *равномерно предельно ограничены.*

Для доказательства теоремы следует в возмущенных уравнениях перейти к новым переменным по формулам (4), а затем для полученной системы в качестве функции Ляпунова взять функцию (6). При этом для нахождения наиболее широкой области допустимых значений σ и γ параметры ν_1 и ν_2 нужно выбирать так, чтобы имело место равенство $(\nu_1 + \mu - 1) = \nu_2\mu$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 — это теорема о предельной ограниченности по нелинейному приближению. Она утверждает, что возмущения не нарушают предельную ограниченность движений, если их порядки меньше порядков однородности функций, входящих в невозмущенные уравнения.

Покажем, что для определенных типов нестационарных возмущений условия теоремы 2 можно ослабить.

Рассмотрим случай, когда система (12) представима в виде

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Q(q) = C(t)\Psi(q), \tag{13}$$

где $C(t)$ — матрица размерности $n \times m$, непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$, а компоненты m-мерного вектора $\Psi(q)$ являются непрерывными при $q \in \mathbb{R}^n$ однородными порядка μ функциями. Таким образом, порядок однородности возмущений совпадает с порядком однородности позиционных сил.

Будем считать, что правые части уравнений (13) удовлетворяют следующим условиям.

Предположение 1. Равномерно относительно $t \geqslant 0$ имеет место предельное соотношение

$$\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} C(s)ds \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

Предположение 2. Для подсистемы (2) существует непрерывно дифференцируемая при $y \in \mathbb{R}^n$ положительно однородная функция Ляпунова $V_1(y)$ порядка $\nu_1 > 1$, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и такая, что функция

$$\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top} C(t)\Psi(y)$$

непрерывно дифференцируема по y при $t \geqslant 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 3. Известно [15], что для выполнения предположения 1 достаточно, чтобы элементы матрицы $C(t)$ были периодическими или почти периодическими функциями с нулевыми средними значениями.

З а м е ч а н и е 4. Предположение 2 выполнено, например, в таких случаях:

1) $C(t) = c(t)I$, $V_1(y) = \|y\|^{\nu_1}$, $\Psi(y) = \partial F(y)/\partial y$, где $c(t)$ — скалярная функция, I — единичная матрица, $F(y)$ — непрерывно дифференцируемая при $y \in \mathbb{R}^n$ однородная порядка $\mu + 1$ функция;

2) $C(t) = c(t)I$, где $c(t)$ — скалярная функция, I — единичная матрица, а $\Psi(y) = \|y\|^{\mu-1}y$ при $y \neq 0$ и $\Psi(0) = 0$.

Теорема 3. *Пусть $0 < \mu < 1$ и нулевые решения подсистем* (2), (3) *асимптотически устойчивы. Если выполнены предположения 1 и 2, то движения системы* (13) *равномерно предельно ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью замены переменных (4) преобразуем систему (13) к виду

$$\begin{aligned} B\dot{y} &= -Q(y - B^{-1}Az) + C(t)\Psi(y - B^{-1}Az), \\ A\dot{z} &= -Bz - Q(y - B^{-1}Az) + C(t)\Psi(y - B^{-1}Az). \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $V_1(y)$ — положительно однородная порядка ν_1 функция Ляпунова, обладающая свойствами, указанными в предположении 2. Выбираем число $\nu_2 > 1$ так, чтобы имели место соотношения (9), и находим для подсистемы (3) непрерывно дифференцируемую при $z \in \mathbb{R}^n$ положительно однородную порядка ν_2 функцию Ляпунова $V_2(z)$, удовлетворяющую требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Для системы (14) функцию Ляпунова $V(y, z)$ строим по формуле (6). Получим

$$\dot{V}\big|_{(14)} \leqslant -\varepsilon\lambda_1\|y\|^{\nu_1+\mu-1} - \lambda_2\|z\|^{\nu_2} + \lambda_3\|z\|^{\nu_2+\mu-1} + \lambda_4\|z\|^{\nu_2-1}\|y\|^{\mu} +$$

$$+ \varepsilon\lambda_5\|y\|^{\nu_1-1}\left(\big\|Q(y) - Q(y - B^{-1}Az)\big\| + \big\|\Psi(y) - \Psi(y - B^{-1}Az)\big\|\right) +$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top}B^{-1}C(t)\Psi(y).$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_5$ — положительные постоянные.

Значит (см. доказательство теоремы 1), найдутся положительные числа ε и Δ такие, что при $\|y\|+\|z\|\geqslant\Delta$ имеет место оценка

$$\dot V\big|_{(14)}\leqslant-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\lambda_1\|y\|^{\nu_1+\mu-1}+\lambda_2\|z\|^{\nu_2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top}B^{-1}C(t)\Psi(y).$$

Далее в соответствии с подходами, предложенными в [23–25], строим новую функцию Ляпунова по формуле

$$\widetilde V(t,y,z)=V(y,z)-\varepsilon\left(\frac{\partial V_1(y)}{\partial y}\right)^{\top}B^{-1}\int\limits_0^t e^{\omega(s-t)}C(s)ds\,\Psi(y),$$

где ω — положительный параметр.

При всех $t\geqslant0$, $y,z\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$\varepsilon\rho_1\|y\|^{\nu_1}+\rho_2\|z\|^{\nu_2}-\frac{\varepsilon}{\omega}\rho_3\|y\|^{\nu_1+\mu-1}\leqslant\widetilde V(t,y,z)\leqslant\varepsilon\rho_4\|y\|^{\nu_1}+\rho_5\|z\|^{\nu_2}+\frac{\varepsilon}{\omega}\rho_3\|y\|^{\nu_1+\mu-1}.$$

Здесь $\rho_i>0$, $i=1,\dots,5$.

Дифференцируя функцию $\widetilde V(t,y,z)$ в силу системы (14), получаем, что при $\|y\|+\|z\|\geqslant\Delta$ выполнено неравенство

$$\dot{\widetilde V}\big|_{(14)}\leqslant-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\lambda_1\|y\|^{\nu_1+\mu-1}+\lambda_2\|z\|^{\nu_2}\right)+\frac{\varepsilon}{\omega}\lambda_6\|y\|^{\nu_1+\mu-2}\left(\|y\|^{\mu}+\|z\|^{\mu}\right)+$$

$$+\varepsilon\omega\lambda_7\left\|\int\limits_0^t e^{\omega(s-t)}C(s)ds\right\|\|y\|^{\nu_1+\mu-1},$$

в котором λ_6,λ_7 — положительные постоянные.

Известно [26, с. 347, 348], что

$$\omega\left\|\int\limits_0^t e^{\omega(s-t)}C(s)ds\right\|\to0\quad\text{при}\quad\omega\to0$$

равномерно относительно $t\geqslant0$. Поэтому положительные числа ω и $\tilde\Delta$ можно выбрать так, чтобы в области $t\geqslant0$, $\|y\|+\|z\|\geqslant\tilde\Delta$ были справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\rho_1\|y\|^{\nu_1}+\rho_2\|z\|^{\nu_2}\right)\leqslant\widetilde V(t,y,z)\leqslant2\left(\varepsilon\rho_4\|y\|^{\nu_1}+\rho_5\|z\|^{\nu_2}\right),$$

$$\dot{\widetilde V}\big|_{(14)}\leqslant-\frac{1}{4}\left(\varepsilon\lambda_1\|y\|^{\nu_1+\mu-1}+\lambda_2\|z\|^{\nu_2}\right).$$

Таким образом, функция $\widetilde V(t,y,z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Йосидзавы. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть система (13) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 + b\dot{q}_1 + g\dot{q}_2 + (b + \beta_1 \cos t)q_1^{1/3} + gq_2^{1/3} = 0, \\ &\ddot{q}_2 - g\dot{q}_1 + b\dot{q}_2 - gq_1^{1/3} + (b + \beta_2 \sin t)q_2^{1/3} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где b, g, β_1, β_2 — постоянные коэффициенты.

Изолированные подсистемы (2) и (3), соответствующие уравнениям (15), имеют вид

$$\dot{y}_1 + y_1^{1/3} = 0, \qquad \dot{y}_2 + y_2^{1/3} = 0,$$

$$\dot{z}_1 + bz_1 + gz_2 = 0, \qquad \dot{z}_2 - gz_1 + bz_2 = 0.$$

Если $b > 0$, то нулевые решения этих подсистем асимптотически устойчивы. Кроме того, нетрудно проверить, что для системы (15) выполнены предположения 1 и 2. Применяя теорему 3, получаем, что при $b > 0$ движения системы (15) равномерно предельно ограничены.

Следует отметить, что, для того чтобы гарантировать предельную ограниченность, не требуется накладывать никаких условий на величины β_1 и β_2, характеризующие амплитуды возмущений.

Условия предельной ограниченности гибридной механической системы. Покажем, что подходы, предложенные в настоящей статье, могут быть использованы для анализа асимптотического поведения движений механических систем с переключениями.

Система с переключениями — это гибридная динамическая система. Она состоит из семейства подсистем и закона переключения, определяющего порядок их функционирования [27, 28]. При решении многих прикладных задач необходимо гарантировать, что изучаемая система обладает требуемыми свойствами при любом допустимом законе переключения [27]. Основной способ решения данной проблемы заключается в построении общей функции Ляпунова для соответствующего семейства подсистем. Этот способ эффективно применяется для исследования динамики широкого класса систем (см. [27, 28] и цитируемую там литературу). Однако задача построения общей функции Ляпунова до сих пор не решена в полном объеме даже для семейства линейных стационарных подсистем.

Рассмотрим механическую систему с переключающимися позиционными силами

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Q_\sigma(q) = 0. \tag{16}$$

Здесь $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$, A и B — постоянные неособые матрицы, $\sigma = \sigma(t)$ — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключения, $\sigma(t) : [0, +\infty) \to \{1, \ldots, N\}$, компоненты векторов $Q_1(q), \ldots, Q_N(q)$ представляют собой непрерывные при $q \in \mathbb{R}^n$ однородные функции порядка $\mu > 0$. Предполагаем, что функция $\sigma(t)$ на любом ограниченном промежутке имеет конечное число точек разрыва. Такие законы переключения будем называть допустимыми.

В каждый момент времени динамика системы (16) определяется одной из подсистем семейства

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Q_j(q) = 0, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \mu < 1$*, нулевое решение подсистемы* (3) *асимптотически устойчиво, а для семейства подсистем*

$$B\dot{y} + Q_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

существует общая непрерывно дифференцируемая при $y \in \mathbb{R}^n$ *положительно однородная порядка* $\nu_1 > 1$ *функция Ляпунова* $V_1(y)$*, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Тогда движения системы* (16) *равномерно предельно ограничены при любом допустимом законе переключения.*

Доказательство. С помощью замены переменных (4) переходим от (17) к новому семейству подсистем

$$\begin{gathered} B\dot{y} = -Q_j(y - B^{-1}Az), \\ A\dot{z} = -Bz - Q_j(y - B^{-1}Az), \\ j = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть $V_1(y)$ — общая положительно однородная порядка $\nu_1 > 1$ функция Ляпунова, построенная для семейства (18). Выбираем число $\nu_2 > 1$ так, чтобы имели место соотношения (9), и находим для подсистемы (3) непрерывно дифференцируемую при $z \in \mathbb{R}^n$ положительно однородную порядка ν_2 функцию Ляпунова $V_2(z)$, для которой выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(y, z)$, построенную по формуле (6). По аналогии с доказательством теоремы 1 нетрудно показать, что при соответствующем выборе параметра ε эта функция будет общей функцией Ляпунова для семейства (19), удовлетворяющей требованиям теоремы Йосидзавы о предельной ограниченности. Теорема доказана.

Пример 3. Рассмотрим гибридную механическую систему с одной степенью свободы

$$\ddot{q} + b\dot{q} + c_\sigma q^\mu = 0. \tag{20}$$

Здесь $q \in \mathbb{R}$, $\sigma = \sigma(t)$ — допустимый закон переключения, $b, c_1, \ldots, c_N$ — постоянные положительные коэффициенты, μ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

Известно [27], что при $\mu = 1$ коэффициенты $b, c_1, \ldots, c_N$ и закон переключения $\sigma(t)$ можно подобрать так, чтобы у уравнения (20) существовали неограниченные решения.

С помощью теоремы 4 получаем, что если $0 < \mu < 1$, то решения уравнения (20) будут равномерно предельно ограничены при любых положительных значениях $b, c_1, \ldots, c_N$ и любом допустимом законе переключения.

Литература

1. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.

2. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.

3. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

4. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 320 с.

5. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.

6. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.

7. *Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

8. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 126–142.

9. *Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A.* Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 264–277. doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.304

10. *Косов А. А.* Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 4. С. 123–129.

11. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.* Stability of hybrid mechanical systems with switching linear force fields // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2011. Vol. 11, N 1. P. 53–64.

12. *Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y.* Stability and stabilization of mechanical systems with switching // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, N 6. P. 1143–1154.

13. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P.* Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. Vol. 9. P. 388–397.

14. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B.* Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 83, N 4. P. 2427–2434.

15. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

16. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. 223 p.

17. *Фадеев С. С.* Условия предельной ограниченности решений нелинейных механических систем с доминированием гироскопических сил // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 74–84.

18. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 380 с.

19. *Bhat S. P., Bernstein D. S.* Geometric homogeneity with applications to finite-time stability // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2005. Vol. 17. P. 101–127.

20. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach // Automatica. 2015. Vol. 51. P. 332–340.

21. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.

22. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19. P. 467–473.

23. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 3. С. 295–296.

24. *Александров А. Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 2. С. 205–209.

25. *Тихомиров О. Г.* Устойчивость однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. Вып. 3. С. 123–130.

26. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

27. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. 1999. Vol. 19, N 15. P. 59–70.

28. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev. 2007. Vol. 49, N 4. P. 545–592.

Статья поступила в редакцию 21 января 2019 г.

Статья принята к печати 15 марта 2019 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Жан Йингюан — PhD, лектор; jyzhan@bjut.edu.cn

Investigation of ultimate boundedness conditions of mechanical systems via decomposition *

A. Yu. Aleksandrov [1], *J. Zhan* [2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

[2] Beijing University of Technology, 100, Pingleyuan ul., Beijing, 100124, Chinese People's Republic

For citation: Aleksandrov A. Yu., Zhan J. Investigation of ultimate boundedness conditions of mechanical systems via decomposition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 2, pp. 173–186. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.202 (In Russian)

A mechanical system with linear velocity forces and nonlinear homogeneous positional ones is studied. It is required to obtain conditions for the ultimate boundedness of motions of this system. To solve the problem, the decomposition method is used. Instead of the original system of the second order equations, it is proposed to consider two auxiliary subsystems of the first order. It should be noted that one of these subsystems is linear, and another one is homogeneous. Using the Lyapunov direct method, it is proved that if the zero solutionsof the isolated subsystems are asymptotically stable, and the order of homogeneity of the positional forces is less than one, then the motions of the original system are uniformly ultimately bounded. Next, conditions are determined under which perturbations do not disturb the ultimate boundedness of motions. A theorem on uniform ultimate boundedness by nonlinear approximation is proved. In addition, it was shown thatfor some types of nonstationary perturbations with zero mean values the conditions of this theorem could be relaxed. A mechanical system with switched nonlinear positional forces is also investigated. For the corresponding family of systems, a common Lyapunov function is constructed. The existence of such a function ensures that the motions of the considered hybrid system are uniformly ultimately bounded for any admissible switching law. Examples are presented demonstrating the effectiveness of the developed approaches.

Keywords: mechanical system, ultimate boundedness, homogeneous function, decomposition, Lyapunov direct method.

References

1. Voronov A. A. *Vvedenie v dinamiku slozhnyh upravljaemyh sistem* [*Introduction in dynamics of complex control systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 352 p. (In Russian)

2. *Metod vektornyh funkcij Ljapunova v teorii ustojchivosti* [*Method of vector Lyapunov functions in stability theory*]. Eds by A. A. Voronov, V. M. Matrosov. Moscow, Nauka Publ., 1987, 312 p. (In Russian)

3. Matrosov V. M. *Metod vektornyh funkcij Ljapunova: analiz dinamicheskih svojstv nelinejnyh sistem* [*Vector Lyapunov function method: analysis of dynamical properties of nonlinear systems*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 384 p. (In Russian)

4. Zubov V. I. *Analiticheskaja dinamika giroskopicheskih sistem* [*Analytical dynamics of gyroscopic systems*]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1970, 320 p. (In Russian)

* The reported study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00146-a), by the Saint Petersburg State University (project Id: 37569826), by the National Natural Science Foundation of China (grant N 61803007) and by the Rail Transit Joint Funds of Beijing Natural Science Foundation and Traffic Control Technology (grant N L171001).

5. Merkin D. R. *Giroskopicheskie sistemy* [*Gyroscopic systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 344 p. (In Russian)

6. Pyatnitskii E. S. Princip dekompozicii v upravlenii mehanicheskimi sistemami [The principle of decomposition in the control of mechanical systems]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [*Papers of Academy of Sciences of the USSR*], 1988, vol. 300, no. 2, pp. 300–303. (In Russian)

7. Chernous'ko F. L., Anan'evskii I. M., Reshmin S. A. *Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimi sistemami* [*Methods of control of nonlinear mechanical systems*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 328 p. (In Russian)

8. Podval'nyi S. L., Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of a parabolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 126–142 (In Russian)

9. Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 264–277. doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.304

10. Kosov A. A. Issledovanie ustojchivosti singuljarnyh sistem metodom vektor-funkcij Ljapunova [Stability investigation of singular systems via vector Lyapunov functions method]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2005, iss. 4, pp. 123–129. (In Russian)

11. Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L. Stability of hybrid mechanical systems with switching linear force fields. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 53–64.

12. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 6, pp. 1143–1154.

13. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2014, vol. 9, pp. 388–397.

14. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces. *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 83, no. 4, pp. 2427–2434.

15. Demidovich B. P. *Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti* [*Lectures on the mathematical stability theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian)

16. Yoshizawa T. *Stability theory by Liapunov's second method*. Tokyo, The Math. Soc. of Japan Publ., 1966, 223 p.

17. Fadeev S. S. Uslovija predel'noj ogranichennosti reshenij nelinejnyh mehanicheskih sistem s dominirovaniem giroskopicheskih sil [Ultimate boundedness conditions of solutions of nonlinear mechanical systems with domination of gyroscopic forces]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2010, iss. 4, pp. 74–84. (In Russian)

18. Zubov V. I. *Dinamika upravljaemyh sistem* [*Dynamics of control systems*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2004, 380 p. (In Russian)

19. Bhat S. P., Bernstein D. S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2005, vol. 17, pp. 101–127.

20. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach. *Automatica*, 2015, vol. 51, pp. 332–340.

21. Zubov V. I. *Ustojchivost' dvizhenija* [*Motion stability*]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1973, 272 p. (In Russian)

22. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, pp. 467–473.

23. Aleksandrov A. Yu. Ob asimptoticheskoj ustojchivosti reshenij sistem nestacionarnyh differencial'nyh uravnenij s odnorodnymi pravymi chastjami [On the asymptotic stability of solutions of nonstationary differential equation systems with homogeneous right-hand sides]. *Doklady RAN* [*Papers of Russian Academy of Sciences*], 1996, vol. 349, no. 3, pp. 295–296. (In Russian)

24. Aleksandrov A. Yu. Ob ustojchivosti ravnovesija nestacionarnyh sistem [On the stability of equilibrium of nonstationary systems]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 205–209. (In Russian)

25. *Tikhomirov O. G.* Ustojchivost' odnorodnyh nestacionarnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Stability of homogeneous systems of ordinary differential equations]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2007, iss. 3, pp. 123–130. (In Russian)

26. Bogoluybov N. N., Mitropol'skii Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij* [*Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 412 p. (In Russian)

27. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 15, pp. 59–70.

28. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.,* 2007, vol. 49, no. 4, pp. 545–592.

Received: January 21, 2019.
Accepted: March 15, 2019.

Author's information:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Jingyuan Zhan — PhD, Lecturer; jyzhan@bjut.edu.cn