УДК 537.87
MSC 78A45

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2020. Т. 16. Вып. 2

О понижении числа уравнений в задаче об излучении кластера взаимодействующих частиц*

А. А. Тищенко[1,2], *Д. Ю. Сергеева*[1,3], *Д. И. Гараев*[1]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Российская Федерация, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
[2] Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1
[3] Международная научно-образовательная лаборатория радиационной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Российская Федерация, 308034, Белгород, ул. Королёва, 2а

Для цитирования: *Тищенко А. А., Сергеева Д. Ю., Гараев Д. И.* О понижении числа уравнений в задаче об излучении кластера взаимодействующих частиц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 144–149. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.206

Аналитически рассмотрено поляризационное излучение, возбуждаемое при взаимодействии электрона с кластером из взаимодействующих субволновых частиц. Результаты пригодны как для нерелятивистских, так и для релятивистских заряженных частиц. Получено выражение для Фурье-образа поля излучения по времени, позволяющее непосредственно рассчитать спектральную и угловую плотности излученной энергии. В общем случае для нахождения поля излучения с учетом взаимодействия частиц необходимо решить систему из $N!$ самосогласованных тензорных уравнений, где N — число частиц в кластере. Предложен алгоритм, позволяющий уменьшить систему из $N!$ уравнений до системы из N уравнений. Снижение числа уравнений реализуется за счет вычисления полей не от каждого источника, а в каждой точке, где находится дипольный момент. Это значительно упрощает решение задач об излучении кластеров частиц.

Ключевые слова: излучение заряженных частиц, взаимодействие, субволновые частицы.

Введение. Процессы генерации излучения пучками заряженных частиц важны не только как источник электромагнитного излучения [1], как механизм диагностики пучков на ускорителях, коллайдерах, лазерах на свободных электронах и т. д. [2, 3], но и для исследования разного рода структур [4, 5]. При этом даже в релятивистском случае поле пучка частиц ограничено величиной $\gamma\beta\lambda/2\pi$, где γ — Лоренц-фактор, λ — длина волны, а β — приведенная скорость частицы [6]. Таким образом, эффективный вклад в излучение вносят ограниченные в пространстве области мишени, и в случае дискретного распределения частиц, образующих мишень, фактически имеем дело с излучением кластеров. Например, такая же ситуация складывается с излучением пучков заряженных частиц от метаматериалов — искусственных структур со свойствами, не встречающимися в природе [7].

В случае отсутствия взаимодействия между частицами (элементами) мишени решение задачи об излучении кластера сводится к решению одночастичной задачи, с учетом лишь набега фаз для волн от соседних частиц. Однако, как показано ранее [8], в процессе поляризационного излучения учет взаимодействия между частицами

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-72-00178).

может быть весьма существен, вести к новым эффектам в картине излучения, в том числе к резонансному усилению, изменению положения пиков наибольшей интенсивности. В этом случае эффект взаимодействия между элементами кластера приводит к необходимости решать систему взаимосвязанных уравнений, что резко усложняет поиск решения даже для достаточно небольшого числа частиц в кластере.

Представляет интерес оценить возможность снижения числа уравнений при расчете излучения от кластера взаимодействующих частиц.

Расчет поля излучения. Рассмотрим кластер из взаимодействующих частиц субволнового размера, т. е. частиц, характерный размер которых R_0 много меньше длины волны излучения λ: $R_0 << \lambda$. Пусть для определенности все частицы одинаковы и характеризуются поляризуемостью $\alpha(\omega)$. Частицы расположены в одной плоскости, и положение каждой определяется радиус-вектором $\mathbf{R}_m$. Электрон движется равномерно и прямолинейно параллельно этой плоскости на некотором фиксированном расстоянии h от нее. Обозначим скорость электрона $\mathbf{v}$. При таком пролете, если импакт-параметр электрона h меньше характерного расстояния убывания его собственного поля, возбуждается поляризационное излучение. Вычислим поле излучения с учетом взаимодействия всех частиц. В системе двух частиц учет взаимодействия был выполнен в работе [8]. Неравенство $R_0 << \lambda$ позволяет воспользоваться для расчета дипольным приближением. Тогда дипольный момент каждой частицы $\mathbf{d}$ определяется выражением

$$\mathbf{d}(\mathbf{r},\omega) = \alpha(\omega)\,\mathbf{E}^{\mathrm{mic}}(\mathbf{r},\omega), \tag{1}$$

в котором $\mathbf{E}^{\mathrm{mic}}(\mathbf{r},\omega)$ — микроскопическое поле, которое содержит внешнее поле (собственное поле движущегося электрона) и поля взаимодействия частиц. Микроскопическое поле является решением системы уравнений Максвелла

$$\mathbf{E}^{\mathrm{mic}}(\mathbf{q},\omega) = \mathbf{E}^{0}(\mathbf{q},\omega) - \frac{4\pi i}{\omega}\left\{\mathbf{j}(\mathbf{q},\omega) + \frac{[\mathbf{q},[\mathbf{q},\mathbf{j}(\mathbf{q},\omega)]]}{q^2-k^2}\right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}^{0}(\mathbf{q},\omega)$ — Фурье-образ собственного поля электрона

$$\mathbf{E}^{0}(\mathbf{q},\omega) = -\frac{ie}{2\pi^2}\frac{\mathbf{q}-\mathbf{v}\omega/c^2}{q^2-k^2}\delta(\omega-\mathbf{qv});$$

e — заряд электрона; $k=\omega/c$, ω — частота, c — скорость света в вакууме; $\mathbf{j}(\mathbf{q},\omega)$ — Фурье-образ плотности токов, которая зависит от производной по времени от дипольного момента:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_m \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{R}_m,t)}{\partial t}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_m). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{R}_m$ — радиус-вектор m-й частицы, суммирование ведется по всем частицам метаповерхности, δ — дельта-функция Дирака. С учетом выражений (3) и (1) для i-й компоненты микроскопического поля (2) определяем [9], что

$$\begin{gathered} E_i^{\mathrm{mic}}(\mathbf{r},\omega) = E_i^{0}(\mathbf{r},\omega) - \tfrac{\alpha(\omega)}{2\pi^2}\int d^3q\,\tfrac{q_iq_j-k^2\delta_{ij}}{q^2-k^2}\times \\ \times\sum_m E_j^{\mathrm{mic}}(\mathbf{R}_m,\omega)e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_m)}, \end{gathered} \tag{4}$$

где δ_{ij} — дельта-символ Кронекера.

Поле излучения в волновой зоне может быть получено путем усреднения микроскопического поля по расположению всех частиц на плоскости за вычетом собственного поля электрона. Усреднение должно проводиться с весовой функцией $f(\mathbf{R}_m)$, описывающей расположение частиц на поверхности. Тогда поле излучения находится по формуле

$$E_i^{\text{rad}}(\mathbf{r},\omega) = \tfrac{\alpha(\omega)}{2\pi^2} N \int d^3q S_{ij}(\mathbf{q},\omega) e^{i\mathbf{qr}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d^3p E_j^{\text{mic}}(\mathbf{p},\omega) \times \\ \times \int d^3 R_m f(\mathbf{R}_m) e^{-i\mathbf{qR}_m} e^{i\mathbf{pR}_m},$$

в которой

$$S_{ij}(\mathbf{q},\omega) = -\frac{q_i q_j - k^2 \delta_{ij}}{q^2 - k^2}.$$

Учет взаимодействия частиц в микроскопическом поле. Поле $E_j^{\text{mic}}(\mathbf{R}_m,\omega)$ в правой части выражения (4) является полем, действующим на m-ю частицу, и определяется собственным полем электрона и суммой полей от всех частиц, кроме m-й, т. е. оно выражается следующим образом:

$$\mathbf{E}^{\text{mic}}(\mathbf{R}_m,\omega) = \mathbf{E}^0(\mathbf{R}_m,\omega) + \sum_{l\neq m}^{N} \mathbf{E}_l(\mathbf{R}_m,\omega). \tag{5}$$

Задача сводится к вычислению полей $\mathbf{E}_l(\mathbf{R}_m,\omega)$, которые также определяются дипольными моментами частиц:

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{R}_m,\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3q e^{i\mathbf{qR}_m} e^{-i\mathbf{qR}_l} \frac{k^2 \mathbf{d}_l(\mathbf{R}_l,\omega) - \mathbf{q}(\mathbf{q}\mathbf{d}_l(\mathbf{R}_l,\omega))}{q^2 - k^2},$$

где дипольный момент имеет теперь вид

$$\mathbf{d}_l(\mathbf{R}_l,\omega) = \alpha(\omega) \left[\mathbf{E}^0(\mathbf{R}_l,\omega) + \sum_{p\neq l}^{N} \mathbf{E}_p(\mathbf{R}_l,\omega) \right].$$

Таким образом, для нахождения полей $\mathbf{E}_l(\mathbf{R}_m,\omega)$ получена система из $N!$ самосогласованных уравнений

$$E_{l,i}(\mathbf{R}_m,\omega) = T_{ij}^{nm}(\omega) \left[\mathbf{E}^0(\mathbf{R}_l,\omega) + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq l}}^{N} \mathbf{E}_p(\mathbf{R}_l,\omega) \right]_j, \tag{6}$$

здесь

$$T_{ij}^{nm}(\omega) \equiv -\frac{\alpha(\omega)}{2\pi^2} \int d^3q \frac{q_i q_j - k^2 \delta_{ij}}{q^2 - k^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)}.$$

Величина $N!$ может быть велика на практике не только для больших, но и даже при небольших N. В самом деле, при решении задачи о кластере, состоящем из трех частиц, имеем систему из $3! = 6$ связанных уравнений, что даже для этого случая фактически позволяет реализовать только численный расчет, отказываясь от аналитического.

Однако микроскопическое поле (5) можно получить другим способом, который снижает количество уравнений для нахождения полей, действующих на данную частицу, с $N!$ до N. Действительно, микроскопическое поле (5) может быть выведено непосредственно из (4), взятом в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}_m$, и заменой немых индексов суммирования в правой части с m на n, а также исключением самодействия. То есть выражение (4) может быть записано как

$$E_i^{\text{mic}}(\mathbf{R}_m, \omega) = E_i^0(\mathbf{R}_m, \omega) - \\ -\tfrac{\alpha(\omega)}{2\pi^2} \int d^3q \tfrac{q_i q_j - k^2 \delta_{ij}}{q^2 - k^2} \sum_{n \neq m}^{N} E_j^{\text{mic}}(\mathbf{R}_n, \omega) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)}$$

или в более компактном виде

$$E_i^{\text{mic}}(\mathbf{R}_m, \omega) = E_i^0(\mathbf{R}_m, \omega) + \sum_{n \neq m}^{N} T_{ij}^{nm}(\omega) E_j^{\text{mic}}(\mathbf{R}_n, \omega). \tag{7}$$

В то время как системы (5) совместно с (6) содержат $N!$ уравнений, система (7) состоит всего из N уравнений.

Заключение. В статье рассмотрен процесс возбуждения поляризационного излучения при пролете заряженных частиц вблизи произвольно большого кластера субволновых частиц, расположенных в одной плоскости. Под действием внешнего поля, в частности собственного поля электрона, в частицах наводится дипольный момент и они излучают. Однако дипольный момент каждой частицы определяется не только внешним полем электрона, но и полями излучения от соседних частиц, что приводит к существенным изменениям в характеристиках излучения. В свою очередь, поля, действующие на данную частицу со стороны соседних частиц, зависят от ближнепольных полей излучения от остальных частиц и т. д. В общем случае для нахождения поля излучения от такой системы необходимо решить $N!$ самосогласованных уравнений, где N — число взаимодействующих частиц. В случае $N >> 1$, а на практике $N > 3$, получение сколько-нибудь удобного для анализа аналитического решения не представляется возможным. Тем не менее можно уменьшить систему из $N!$ уравнений до системы из N уравнений. Снижение числа уравнений реализуется за счет вычисления полей не от каждого источника, а в каждой точке, где находится дипольный момент. Это расширяет возможности получения аналитического решения задач о большом, но конечном кластере из частиц, а также заметно понижает требования к вычислительным мощностям в случае реализации численного решения.

Литература

1. *Jaeschke E. J., Khan S., Schneider J. R., Hastings J. B.* High brightness photo injectors for brilliant light sources // Synchrotron light sources and free-electron lasers / Eds by E. Jaeschke et al. Switzerland: Springer International Publ., 2014. 1840 p.

2. *Sukhikh L., Kube G., Bajt S., Lauth W., Popov Y., Potylitsyn A.* Backward transition radiation in the extreme ultraviolet region as a tool for the transverse beam profile diagnostic // Phys. Rev. ST AB. 2014. Vol. 17. P. 112805.

3. *Doucas G., Kimmitt M. F., Doria A., Gallerano G. P., Giovenale E., Messina G., Andrews H. L., Brownell J. H.* Determination of longitudinal bunch shape by means of coherent Smith—Purcell radiation // Phys. Rev. ST AB. 2002. Vol. 5. P. 072802.

4. *Tsesses S., Bartal G., Kaminer I.* Light generation via quantum interaction of electrons with periodic nanostructures // Phys. Rev. A. 2017. Vol. 95. P. 013832.

5. *Liu W.* Coherent and tunable light radiation from nanoscale surface plasmons array via an exotic Smith—Purcell effect // Optics Letters. 2015. Vol. 40. P. 4579.

6. *Potylitsyn A. P., Ryazanov M. I., Strikhanov M. N., Tishchenko A. A.* Diffraction radiation from relativistic particles. Vol. 239. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 278 p.

7. *Cai W., Shalaev V.* Optical metamaterials. New York: Springer, 2009. 200 p.

8. *Tishchenko A. A., Sergeeva D. Yu.* Near-field resonances in photon emission via interaction of electrons with coupled nanoparticles // Phys. Rev. B. 2019. Vol. 100. P. 235421.

9. *Sergeeva D. Yu., Tishchenko A. A., Strikhanov M. N.* Microscopic theory of Smith—Purcell radiation from 2D photonic crystal // Nucl. Instrum. and Methods. B. 2017. Vol. 402. P. 206–211.

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2019 г.
Статья принята к печати 28 мая 2020 г.

Контактная информация:

Тищенко Алексей Александрович — канд. физ.-мат. наук; tishchenko@mephi.ru

Сергеева Дарья Юрьевна — канд. физ.-мат. наук; e-mail: dysergeyeva@mephi.ru

Гараев Дамир Ильдарович — garaev-dam-ir@mail.ru

On the reducing the number of equations in the problem of radiation of a cluster of interacting particles*

A. A. Tishchenko[1,2], *D. Yu. Sergeeva*[1,3], *D. I. Garaev*[1]

[1] National Research Nuclear University "MEPhI", 31, Kashirskoye sh., Moscow, 115409, Russian Federation
[2] National Research Center "Kurchatov Institute", 1, Akademika Kurchatova pl., Moscow, 123182, Russian Federation
[3] Laboratory of Radiation Physics, Belgorod National Research University, 2a, Koroleva ul., Belgorod, 308034, Russian Federation

For citation: Tishchenko A. A., Sergeeva D. Yu., Garaev D. I. On the reducing the number of equations in the problem of radiation of a cluster of interacting particles. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 144–149. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.206 (In Russian)

In this paper we investigate analytically polarization radiation excited due to interaction of an electron with a cluster of coupled subwavelength particles. The results are valid both for nonrelativistic and for relativistic charged particles. The expression for the Fourier image of radiation field has been obtained, which allows direct calculating spectral and angular density of the radiated energy. In general case, to find the radiation field with taking into account the interaction between particles, it is necessary to solve a system of $N!$ self-consistent tensor equations, where N is the number of particles in the cluster. We suggest the algorithm for reducing the system of $N!$ equations to N equations. The reduction in the number of equations is achieved through the calculation of the fields at the each point in which the dipole moment is, rather than through calculation of the fields from the every source. This facilitates considerably the finding solutions in problems of radiation for the clusters of particles.

Keywords: radiation from charged particles, interaction, subwavelength particles.

References

1. Jaeschke E. J., Khan S., Schneider J. R., Hastings J. B. High brightness photo injectors for brilliant light sources. *Synchrotron light sources and free-electron lasers.* Eds by E. Jaeschke et al. Switzerland, Springer International Publ., 2014, 1840 p.

* This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-72-00178).

2. Sukhikh L., Kube G., Bajt S., Lauth W., Popov Y., Potylitsyn A. Backward transition radiation in the extreme ultraviolet region as a tool for the transverse beam profile diagnostic. *Phys. Rev. ST AB*, 2014, vol. 17, p. 112805.

3. Doucas G., Kimmitt M. F., Doria A., Gallerano G. P., Giovenale E., Messina G., Andrews H. L., Brownell J. H. Determination of longitudinal bunch shape by means of coherent Smith—Purcell radiation. *Phys. Rev. ST AB*, 2002, vol. 5, p. 072802.

4. Tsesses S., Bartal G., Kaminer I. Light generation via quantum interaction of electrons with periodic nanostructures. *Phys. Rev., A*, 2017, vol. 95, p. 013832.

5. Liu W. Coherent and tunable light radiation from nanoscale surface plasmons array via an exotic Smith—Purcell effect. *Optics Letters*, 2015, vol. 40, p. 4579.

6. Potylitsyn A. P., Ryazanov M. I., Strikhanov M. N., Tishchenko A. A. *Diffraction radiation from relativistic particles.* Vol. 239. Berlin, Springer-Verlag Publ., 2010, 278 p.

7. Cai W., Shalaev V. *Optical metamaterials.* New York, Springer Publ., 2009, 200 p.

8. Tishchenko A. A., Sergeeva D. Yu. Near-field resonances in photon emission via interaction of electrons with coupled nanoparticles. *Phys. Rev., B*, 2019, vol. 100, p. 235421.

9. Sergeeva D. Yu., Tishchenko A. A., Strikhanov M. N. Microscopic theory of Smith—Purcell radiation from 2D photonic crystal. *Nucl. Instrum. and Methods, B*, 2017, vol. 402, pp. 206–211.

Received: September 07, 2019.
Accepted: May 28, 2020.

Authors' information:

Alexey A. Tishchenko — PhD in Physics and Mathematics; tishchenko@mephi.ru

Daria Yu. Sergeeva — PhD in Physics and Mathematics; dysergeyeva@mephi.ru

Damir I. Garaev — garaev-dam-ir@mail.ru