УДК 519.61+512.6 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2020. Т. 16. Вып. 4
MSC 15A23, 15B48, 15A80, 41A50, 90C24

Приближенная факторизация положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации*

Н. К. Кривулин, Е. Ю. Романова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.* Приближенная факторизация положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 357–374. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.402

Рассматривается задача приближенной одноранговой факторизации положительных матриц с пропусками (неопределенными элементами), где матрица аппроксимируется посредством произведения вектора-столбца на вектор-строку, на которые накладываются двусторонние ограничения. Задача сводится к аппроксимации матрицы с использованием метрики Чебышева в логарифмической шкале матрицей единичного ранга с учетом заданных ограничений. Затем задача аппроксимации формулируется в терминах тропической математики, которая изучает теорию и приложение алгебраических систем с идемпотентным сложением. С помощью методов тропической оптимизации построены прямые аналитические решения задачи для случая произвольной положительной матрицы с пропусками и для случая, когда матрица не имеет полностью неопределенных столбцов или строк. Полученные результаты позволяют определить векторы мультипликативного разложения, находя выражения в параметрической форме, удобной для дальнейшего анализа и непосредственных вычислений. Представлен численный пример приближенной одноранговой факторизации матрицы с пропущенными значениями.

Ключевые слова: факторизация положительных матриц, одноранговая аппроксимация матриц, log-чебышевская функция расстояния, тропическая оптимизация, max-алгебра.

1. Введение. Задача приближенной матричной факторизации (мультипликативного разложения) состоит в аппроксимации заданной матрицы при помощи произведения матриц, обладающих определенными свойствами. Приближение матрицы посредством произведения двух матриц меньшего ранга, включая одноранговую аппроксимацию, используется в задачах статистики [1], анализа данных [2], обработки изображений [3], теории графов [4] и принятия решений [5, 6]. Обзор приложений матричной факторизации и аппроксимации представлен в работах [7, 8]. При одноранговой факторизации для приближения матрицы используется произведение вектора-столбца и вектора-строки.

В практических задачах могут возникать ограничения, которым должны удовлетворять матрицы, полученные в результате факторизации. Например, распространенным является условие неотрицательности элементов матриц [4, 7]. В некоторых приложениях требуется, чтобы элементы матриц в разложении не выходили за пределы заданного диапазона значений [2] или были связаны между собой определенными соотношениями [5, 6]. Когда некоторые значения исходной матрицы не заданы (пропущены), решение задачи факторизации включает заполнение пропусков.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-010-00145).

В основе методов решения задачи аппроксимации матриц обычно лежит использование расстояния Евклида в качестве функции ошибки аппроксимации [9]. Другие подходы опираются на минимизацию манхэттенского расстояния (аппроксимация в метрике L_1) [10] и расстояния Чебышева (аппроксимация в метрике L_∞) [10, 11]. При аппроксимации положительных матриц функцию ошибки можно задавать в логарифмической шкале, т. е. сравнивать логарифмы элементов исходной и приближающей матриц. Для манхэттенского расстояния такой подход к аппроксимации применяется в [12]. Указанные методы, как правило, обеспечивают численное решение задачи с помощью итерационных алгоритмов, которые для многих практических задач позволяют определить компоненты мультипликативного разложения матрицы с приемлемым уровнем вычислительной сложности и заданной степенью точности.

При переходе от обычной линейной шкалы к логарифмической появляется возможность прямого аналитического решения задачи факторизации в виде расчетных формул, удобных для последующего анализа решений и для непосредственных вычислений. Такие решения были получены, например, в [13, 14], где задача одноранговой аппроксимации решается при помощи минимизации расстояния Чебышева в логарифмической шкале (log-чебышевского расстояния). Разработка аналитических решений задачи дает возможность расширить и дополнить существующие численные методы и представляет особый интерес, когда применение алгоритмических решений по тем или иным причинам оказывается невозможным или нецелесообразным.

В настоящей работе рассматривается задача одноранговой факторизации положительных прямоугольных матриц с пропусками. Заданная матрица аппроксимируется произведением двух положительных векторов, для элементов которых установлены ограничения на диапазон их значений. Для измерения ошибки аппроксимации при факторизации используется log-чебышевское расстояние, которое вычисляется по всем определенным (не пропущенным) элементам заданной матрицы.

Задача аппроксимации приводится к задаче оптимизации, которая записывается и решается в терминах тропической (идемпотентной) математики — области математики, изучающей теорию полуколец и полуполей с идемпотентным сложением и ее приложения [15–19]. С помощью методов тропической оптимизации [20–23] получены прямые аналитические решения задачи при различных предположениях о нулевых элементах матрицы, для которой строится разложение.

Структура статьи следующая. Постановка и обсуждение решения задачи одноранговой факторизации матриц приведены в п. 2. В п. 3 содержатся необходимые определения и обозначения тропической (идемпотентной) математики. В п. 4 сформулирована задача тропической оптимизации и предлагается ее полное решение в двух формах: для произвольной ненулевой матрицы и для матрицы без нулевых столбцов (строк). В п. 5 полученные результаты применяются для решения исходной задачи факторизации и представлен численный пример факторизации матрицы с пропущенными значениями.

2. Задача приближенной матричной факторизации. Задача одноранговой факторизации матрицы при условии ограничений формулируется в виде задачи аппроксимации этой матрицы с помощью произведения вектора-столбца и вектора-строки в следующей форме:

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^-), \\ \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}, \end{gathered} \tag{1}$$

где d — функция, измеряющая ошибку аппроксимации; $\boldsymbol{A}$ — заданная матрица; $\boldsymbol{x}$ —

вектор-столбец; $\boldsymbol{y}^-$ — вектор-строка, полученная из вектора-столбца $\boldsymbol{y}$ путем транспонирования и замены ненулевых элементов на обратные; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — заданные векторы.

Рассмотрим задачу одноранговой факторизации положительной матрицы при помощи минимизации log-чебышевского расстояния. Пропущенные элементы матрицы доопределим нулями. С использованием логарифма по основанию больше единицы задача одноранговой факторизации матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матрицей $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^-$, где $\boldsymbol{x} = (x_i)$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{y}^- = (y_j^{-1})$ — вектор-строка, состоит в минимизации функции

$$\max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} |\log a_{ij} - \log x_i y_j^{-1}|. \tag{2}$$

Заметим, что минимальное возможное значение функции (2) равно нулю и достигается тогда и только тогда, когда исходная матрица имеет единичный ранг, а потому задача одноранговой факторизации решается точно.

Для log-чебышевского расстояния, в силу свойства монотонности логарифма по основанию больше единицы, выполняется равенство

$$\max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} |\log a_{ij} - \log x_i y_j^{-1}| = \log \max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} \max(x_i^{-1} a_{ij} y_j, x_i a_{ij}^{-1} y_j^{-1}).$$

Так как минимумы логарифма и его аргумента в правой части последнего равенства достигаются одновременно, минимизация log-чебышевского расстояния эквивалентна минимизации аргумента логарифма. Тогда задача (1) одноранговой факторизации с ограничениями сводится к задаче

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} \max(x_i^{-1} a_{ij} y_j, x_i a_{ij}^{-1} y_j^{-1}), \\ \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}. \end{gathered} \tag{3}$$

При отсутствии ограничений полные решения задачи для квадратных матриц получены в работах [13, 14] с использованием методов и результатов тропической оптимизации. В п. 4 эти результаты будут обобщены на случай задачи с прямоугольной исходной матрицей, которая может содержать неопределенные элементы, а также с учетом ограничений на диапазон значений элементов векторов разложения. С этой целью задача (3) будет записана в векторной форме в терминах тропической математики и решена аналитически методами тропической оптимизации.

3. Элементы тропической математики. Приведем краткий обзор основных определений и результатов тропической математики, которые будут применяться в дальнейшем. Дополнительные сведения по теории и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [15–19].

3.1. Идемпотентное полуполе. Пусть непустое числовое множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ с нейтральным элементом $\mathbb{0}$ (нуль) и умножения $\otimes$ с нейтральным элементом $\mathbb{1}$ (единица). Сложение является идемпотентным, т. е. удовлетворяет условию $x \oplus x = x$ для любого элемента $x \in \mathbb{X}$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо: для любого ненулевого элемента $x \in \mathbb{X}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$. Далее при записи выражений знак умножения $\otimes$ для краткости опускается. Множество $\mathbb{X}$ с операциями $\oplus$ и $\otimes$ образует алгебраическую систему, которую называют идемпотентным полуполем.

Операция возведения в целую степень определяется как обычно: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1}x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$ для любого ненулевого $x \in \mathbb{X}$ и натурального p. Дополнительно предполагается, что для любого $a \in \mathbb{X}$ уравнение $x^p = a$ имеет единственное решение x при всех натуральных p, обеспечивая существование рациональных степеней.

Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального числа $\alpha \geqslant 0$ выполняется тропический аналог биномиального тождества в виде $(x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha$.

Идемпотентность сложения индуцирует на $\mathbb{X}$ частичный порядок так, что $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения следует справедливость неравенств $x \leqslant x \oplus y$ и $y \leqslant x \oplus y$, а также то, что неравенство $x \oplus y \leqslant z$ равносильно паре неравенств $x \leqslant z$, $y \leqslant z$. Операции сложения и умножения монотонны относительно введенного порядка, что означает для любых $x \leqslant y$ и любого z выполнение неравенств $x \oplus z \leqslant y \oplus z$, $xz \leqslant yz$. Нетрудно проверить, что для ненулевых x, y и рационального числа $p \geqslant 0$ из неравенства $x \leqslant y$ вытекают неравенства $x^p \leqslant y^p$ и $x^{-p} \geqslant y^{-p}$. Далее дополнительно считаем, что указанный порядок является линейным.

Рассмотрим идемпотентное полуполе, которое определено на множестве неотрицательных вещественных чисел и в качестве сложения $\oplus$ имеет операцию взятия максимума, а в качестве умножения $\otimes$ — обычное арифметическое умножение. Нейтральные элементы $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ совпадают с арифметическими 0 и 1. Понятия обратного элемента и степени имеют обычный смысл. Отношение порядка, индуцированное идемпотентным сложением, совпадает с естественным линейным порядком на неотрицательной вещественной полуоси. Такое полуполе обычно называют max-алгеброй.

3.2. Матрицы и векторы. Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц с элементами из $\mathbb{X}$, которые имеют m строк и n столбцов. Матрица со всеми элементами, равными $\mathbb{0}$, является нулевой и обозначается $\mathbf{0}$. Матрица называется регулярной по столбцам (строкам), если в каждом столбце (строке) есть по крайней мере один ненулевой элемент. Квадратная матрица, диагональные элементы которой равны $\mathbb{1}$, а недиагональные — $\mathbb{0}$, называется единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$. В случае max-алгебры матрицы $\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{I}$ совпадают с обычными нулевой и единичной матрицами.

Сложение и умножение согласованных по размеру матриц и умножение матрицы на скаляр выполняются по обычным формулам, в которых роль арифметических сложения и умножения выполняют операции $\oplus$ и $\otimes$. Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ называется преобразование в матрицу $\boldsymbol{A}^- = (a_{ij}^-) \in \mathbb{X}^{n\times m}$, где $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^- = \mathbb{0}$ — иначе.

Матричные неравенства рассматриваются как покомпонентные в смысле введенного на $\mathbb{X}$ отношения порядка. Свойства скалярных операций $\oplus$ и $\otimes$, связанные с указанным отношением порядка, распространяются на матрицы обычным путем. В частности, для матриц без нулевых элементов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ из неравенства $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$ следует $\boldsymbol{A}^- \geqslant \boldsymbol{B}^-$.

Рассмотрим множество квадратных матриц $\mathbb{X}^{n\times n}$. След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$. Для матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ подходящего размера и скаляра α верны равенства: $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{B}$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{BC}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{CB})$, $\mathrm{tr}(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$.

Целые неотрицательные степени квадратных матриц определяются стандартным образом: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$ для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и целого $p > 0$.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — произвольная матрица. Введем функцию

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^n.$$

Рассмотрим бесконечную сумму степеней матрицы $\boldsymbol{A}$ (матрицу Клини)

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^2 \oplus \cdots .$$

Если матрица $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathbb{1}$, то для матрицы Клини справедливо следующее равенство:

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Из него следует, что при $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathbb{1}$ матрица Клини обладает экстремальным свойством в виде неравенства $\boldsymbol{A}^k \leqslant \boldsymbol{A}^*$ для всех целых чисел $k \geqslant 0$.

Обозначим множество векторов-столбцов размера n через $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, является нулевым. Вектор без нулевых элементов называется регулярным. В max-алгебре регулярность вектора означает, что он положительный.

Вектор $\boldsymbol{y}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, если $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus c_m\boldsymbol{x}_m$, где $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{X}$. В max-алгебре коллинеарность векторов имеет обычный смысл.

Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i)$ называется преобразование в вектор-строку $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ — в противном случае. Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$.

Число $\lambda \in \mathbb{X}$ и ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ являются собственными числом и вектором матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если они удовлетворяют равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы и находится по формуле

$$\lambda = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

Из этого соотношения вытекает, что $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^m) \leqslant \lambda^m$ для любого натурального $m \leqslant n$, откуда следует неравенство $\mathrm{Tr}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}) = \lambda^{-1}\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \lambda^{-n}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^n \leqslant \mathbb{1}$.

3.3. Решение векторных неравенств. Предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$. Требуется решить относительно вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}. \tag{4}$$

Справедлив следующий результат (см., например, [18]).

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор. Тогда все решения неравенства* (4) *задаются неравенством $\boldsymbol{x} \leqslant (\boldsymbol{b}^-\boldsymbol{A})^-$.*

Пусть заданы квадратная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$ и необходимо найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Полное решение такого неравенства было получено в работе [23] в следующем виде.

Лемма 2. *Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ — общее регулярное решение неравенства* (5)*. Тогда справедливы утверждения:*

1) если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{b}$;

2) если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$, то регулярных решений не существует.

4. Задачи тропической оптимизации. Здесь рассматриваются задачи тропической оптимизации, сформулированные в терминах общего идемпотентного полуполя, и приводятся их аналитические решения. Пусть дана квадратная матрица

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается минимум
$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Приведем результат [22], который описывает полное решение этой задачи.

Лемма 3. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче* (6) *равен λ, а все регулярные решения имеют вид $\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n$.*

Предположим теперь, что дополнительно заданы векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$ и необходимо найти все регулярные решения задачи с ограничениями
$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \\ &\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{q}. \end{aligned} \tag{7}$$

Полное решение последней задачи было получено в работе [20].

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, $\boldsymbol{p}$ — вектор, $\boldsymbol{q}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p} \leqslant \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (7) *равен*
$$\theta = \lambda \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{p})^{1/k},$$
а все регулярные решения имеют вид $\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant (\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A})^{*})^{-}$.

Рассмотрим для квадратной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ задачу нахождения всех регулярных векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$, которые дают минимум
$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

В работе [13] задача (8) приводится к виду (6) и решается с использованием леммы 3.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, μ^2 — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Тогда минимум в задаче* (8) *равен μ, а все регулярные решения имеют вид*
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\mu^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{A}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{y} &= \mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\mu^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^n. \end{aligned}$$

Для задачи (8) с регулярной по столбцам матрицей в [14] предлагается решение в следующем виде.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 матрица $\boldsymbol{A}$ является регулярной по столбцам. Тогда все регулярные решения задачи* (8) *определяются соотношениями*
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = (\mu^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n, \\ &\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant (\mu^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}. \end{aligned}$$

В случае матрицы, регулярной по строкам, получается аналогичный результат [14].

Рассмотрим теперь задачу, которая представляет интерес для настоящей работы. Пусть даны прямоугольная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^n$ и требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается минимум

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{x}; \\ &\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}. \end{aligned} \tag{9}$$

Построим полное решение задачи (9) для случая произвольной ненулевой матрицы $\boldsymbol{A}$, а также для матрицы $\boldsymbol{A}$, регулярной по столбцам (строкам).

4.1. Решение задачи для ненулевой матрицы. Полное решение задачи (9) в компактном векторном виде для произвольной ненулевой матрицы дает следующая теорема. Доказательство теоремы основано на приведении рассматриваемой задачи к форме (7) и последующем применении теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, μ^2 — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, а $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ — регулярные векторы такие, что $\boldsymbol{b}^-\boldsymbol{a} \leqslant \mathbb{1}$ и $\boldsymbol{d}^-\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}$. Положим $r = (m+n)/2$ и введем обозначение*

$$\begin{aligned} \theta = \mu \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil} \left(\boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A} (\boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^{k-1} \boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^- \boldsymbol{A}^- (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^{k-1} \boldsymbol{a} \right)^{1/(2k-1)} \oplus \\ \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(\boldsymbol{b}^- (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^k \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{d}^- (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^k \boldsymbol{c} \right)^{1/(2k)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда минимум в задаче (9) *равен θ, а все регулярные решения имеют вид*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\theta^{-2} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^* \boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1} \boldsymbol{A} (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^* \boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{y} &= \theta^{-1} \boldsymbol{A}^- (\theta^{-2} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^* \boldsymbol{v} \oplus (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^* \boldsymbol{w}, \end{aligned} \tag{11}$$

где векторы параметров $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \leqslant & \boldsymbol{v} \leqslant ((\boldsymbol{b}^- \oplus \theta^{-1} \boldsymbol{d}^- \boldsymbol{A}^-)(\theta^{-2} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^*)^-, \\ \boldsymbol{c} \leqslant & \boldsymbol{w} \leqslant ((\theta^{-1} \boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^-)(\theta^{-2} \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*)^-. \end{aligned} \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что задачу (9) можно свести к задаче (7), решение которой известно. Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — векторы размера m и n соответственно. Определим квадратную матрицу $\boldsymbol{B}$ порядка $m+n$ и векторы $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{u}$ размера $m+n$ так:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^- & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}.$$

Записывая задачу (9) в новых обозначениях, перейдем к задаче оптимизации

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{z}} \ \boldsymbol{z}^- \boldsymbol{B} \boldsymbol{z}, \\ &\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{q}. \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим через η спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$. В силу того, что ненулевые элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ расположены симметрично относительно главной диагонали, матрица $\boldsymbol{B}^2$ имеет ненулевой элемент на диагонали и выполняется неравенство $\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^2 > \mathbb{0}$, откуда следует, что $\eta \geqslant \mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{B}^2) > \mathbb{0}$. Далее заметим, что из условия регулярности векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ вытекает, что вектор $\boldsymbol{q}$ также является регулярным, а из неравенств $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leqslant \mathbb{1}$, $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}$ — неравенство $\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p} \leqslant \mathbb{1}$. Теперь к решению задачи (13) можно применить теорему 1, согласно которой минимум в задаче равен

$$\theta = \eta \oplus \bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{p})^{1/k}. \tag{14}$$

Учитывая, что $\theta \geqslant \eta$, имеем неравенства $\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{Tr}(\eta^{-1}\boldsymbol{B}) \leqslant \mathbb{1}$. Из этого следует, что матрица $(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}$ вычисляется как сумма конечного числа слагаемых. По теореме 1 минимум θ в задаче (13) достигается тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{z} = (\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant (\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*})^{-}. \tag{15}$$

Представим полученный результат в терминах исходной задачи. Для этого сначала вычислим для целых $k \geqslant 1$ степени

$$\boldsymbol{B}^{2k-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1} \\ \boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{2k} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где квадратные матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ имеют порядки m и n соответственно.

Заметим, что для нечетных степеней выполняется равенство $\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^{2k-1} = \mathbb{0}$, а для четных степеней, в силу свойств следа, справедливо равенство

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^{2k} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} \oplus \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}.$$

По условию матрица $\boldsymbol{A}$ ненулевая, т. е. в ней есть хотя бы один элемент $a_{ij} \neq \mathbb{0}$. Тогда матрица $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ будет иметь ненулевой элемент на диагонали в строке i, а матрица $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ — на диагонали в строке j. Следовательно, следы, а значит, и спектральные радиусы этих матриц отличны от нуля. Нетрудно убедиться в том, что собственные числа матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ совпадают, а потому будут совпадать и спектральные радиусы.

Пусть μ^{2} обозначает общий спектральный радиус этих матриц. Тогда величину μ^{2} можно вычислить по формулам

$$\mu^{2} = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}).$$

Без ограничения общности далее считаем, что $m \leqslant n$, а потому $2m \leqslant m+n \leqslant 2n$.

Учитывая, что $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{2k-1}) = \mathbb{0}$, а также применяя свойства следа и тропический аналог биномиального тождества, для спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{B}$, с одной стороны, получим неравенство

$$\eta = \bigoplus_{k=1}^{m+n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^{k}) \leqslant \bigoplus_{k=1}^{2n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^{k}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/(2k)}(\boldsymbol{B}^{2k}) = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k})\right)^{1/2} = \mu.$$

С другой стороны, выполняются соотношения

$$\eta = \bigoplus_{k=1}^{m+n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^{k}) \geqslant \bigoplus_{k=1}^{2m} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^{k}) = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{tr}^{1/(2k)}(\boldsymbol{B}^{2k}) = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k})\right)^{1/2} = \mu.$$

Объединяя противоположные неравенства $\eta \leqslant \mu$ и $\eta \geqslant \mu$, получим равенство

$$\eta = \mu.$$

Рассмотрим выражение для минимума (14). Проверим, что с использованием обозначения $r = (m+n)/2$ второе слагаемое в (14) можно записать в следующем виде:

$$\bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{p})^{1/k} = \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k-1} \boldsymbol{p})^{1/(2k-1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k} \boldsymbol{p})^{1/(2k)}.$$

Действительно, для случая, когда число $m+n$ — нечетное, последнее слагаемое в левой части этого равенства включает нечетную степень матрицы $\boldsymbol{B}$ и может быть представлено как $(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{m+n} \boldsymbol{p})^{1/(m+n)} = (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k-1} \boldsymbol{p})^{1/(2k-1)}$, где $k = (m+n+1)/2$, а предпоследнее как $(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{m+n-1} \boldsymbol{p})^{1/(m+n-1)} = (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k} \boldsymbol{p})^{1/(2k)}$, где $k = (m+n-1)/2$.

Тогда для рассматриваемой суммы имеем соотношение

$$\bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{p})^{1/k} = \bigoplus_{k=1}^{(m+n+1)/2} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k-1} \boldsymbol{p})^{1/(2k-1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{(m+n-1)/2} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k} \boldsymbol{p})^{1/(2k)}.$$

Осталось заметить, что $(m+n+1)/2 = \lceil r \rceil$ и $(m+n-1)/2 = \lfloor r \rfloor$. Случай четного $m+n$ проверяется аналогично.

Используя выражения (16) для степеней матрицы $\boldsymbol{B}$, запишем равенства

$$\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k-1} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}^- \boldsymbol{A} (\boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^{k-1} \boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^- \boldsymbol{A}^- (\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^{k-1} \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{B}^{2k} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}^- (\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{d}^- (\boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^k \boldsymbol{c}.$$

Наконец, подставляя полученные результаты в (14), приходим к формуле (10).

Теперь рассмотрим матрицу $\theta^{-1} \boldsymbol{B}$, для которой выполняется условие $\mathrm{Tr}(\theta^{-1} \boldsymbol{B}) \leqslant \mathbb{1}$. При этом условии в соответствии с экстремальным свойством матрицы Клини для всех целых $k \geqslant 0$ справедливо неравенство $(\theta^{-1} \boldsymbol{B})^* \geqslant (\theta^{-1} \boldsymbol{B})^k$.

В силу условия $m+n-1 \leqslant 2n-1$ и монотонности сложения, выполняются равенства

$$(\theta^{-1} \boldsymbol{B})^* = \bigoplus_{k=0}^{m+n-1} (\theta^{-1} \boldsymbol{B})^k = \bigoplus_{k=0}^{2n-1} (\theta^{-1} \boldsymbol{B})^k = \boldsymbol{I} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} (\theta^{-1} \boldsymbol{B})^{2k-1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\theta^{-1} \boldsymbol{B})^{2k}.$$

Применяя формулы (16), в которых $\boldsymbol{B}$ заменяется на $\theta^{-1} \boldsymbol{B}$, окончательно получим, что

$$(\theta^{-1} \boldsymbol{B})^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k & \theta^{-1} \boldsymbol{A} (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^k \\ \theta^{-1} \boldsymbol{A}^- (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k & (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^k \end{pmatrix}.$$

Из условия $\theta \geqslant \eta = \mu$ следует, что $\mathrm{Tr}(\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-) \leqslant \mathrm{Tr}(\mu^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-) \leqslant \mathbb{1}$ и $\mathrm{Tr}(\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A}) \leqslant \mathbb{1}$. Тогда с учетом неравенства $(\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k \leqslant (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^*$ имеем равенства

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1} (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k = \bigoplus_{k=0}^{m-1} (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^k = (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^*, \qquad \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^k = (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^*.$$

В результате их подстановки приходим к матрице Клини

$$(\theta^{-1} \boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^* & \theta^{-1} \boldsymbol{A} (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^* \\ \theta^{-1} \boldsymbol{A}^- (\theta^{-2} \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^-)^* & (\theta^{-2} \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})^* \end{pmatrix},$$

которая определяет все решения задачи с помощью соотношений (15).

После умножения матрицы на вектор в равенстве $\boldsymbol{z} = (\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{T}$ и $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})^{T}$, получим выражения для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в виде (11). Аналогичным образом из неравенства $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant (\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*})^{-}$ находятся границы для векторов параметров $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ в форме (12). □

Нетрудно видеть, что найденное решение задачи при отбрасывании ограничений согласуется с результатом теоремы 2 для задачи без ограничений (8).

4.2. Решение задачи для регулярной по столбцам матрицы. Построим решение задачи (9) для матрицы без нулевых столбцов. При доказательстве основного результата задача оптимизации сводится к решению системы векторных неравенств, в которых минимум целевой функции, полученный в теореме 4, выступает в роли параметра. С использованием лемм 1 и 2 находятся все решения этой системы неравенств.

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 4 матрица* $\boldsymbol{A}$ *является регулярной по столбцам. Тогда все регулярные решения задачи* (9) *определяются соотношениями*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{a} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}, \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}.\end{gathered} \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параметр θ обозначает минимум целевой функции задачи (9). Из теоремы 4 известно, что значение θ определяется формулой (10). Все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, которые обеспечивают минимум, должны удовлетворять системе

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \theta, \qquad \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}. \tag{18}$$

Первое неравенство системы равносильно паре неравенств $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leqslant \theta$ и $\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \theta$. Так как матрица $\boldsymbol{A}$ регулярна по столбцам, то вектор $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}$ регулярный. Тогда для решения первого неравенства относительно вектора $\boldsymbol{y}$ может быть применена лемма 1, которая дает результат в виде $\boldsymbol{y} \leqslant \theta(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}$. После решения второго неравенства относительно $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ и умножения на θ^{-1} будем иметь $\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$.

Объединим полученные неравенства с неравенством $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}$. Сначала найдем нижнюю границу для $\boldsymbol{y}$ в виде $\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y}$. Чтобы получить верхнюю границу, возьмем неравенства $\boldsymbol{y} \leqslant \theta(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}$ и $\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}$, из которых с помощью мультипликативно сопряженного транспонирования получим $\boldsymbol{y}^{-} \geqslant \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{y}^{-} \geqslant \boldsymbol{d}^{-}$. Объединение неравенств дает $\boldsymbol{y}^{-} \geqslant \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-}$, что равносильно неравенству $\boldsymbol{y} \leqslant (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}$.

Система неравенств (18) для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ теперь принимает форму

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}, \qquad \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}. \tag{19}$$

Найдем решение системы (19) относительно вектора $\boldsymbol{x}$. Из первого неравенства этой системы следует неравенство $\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leqslant (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}$, которое по лемме 1 эквивалентно неравенству $(\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c}) \leqslant \mathbb{1}$. Раскроем скобки в левой части последнего неравенства и заменим его эквивалентной системой неравенств

$$\theta^{-2}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \mathbb{1}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \mathbb{1}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1},$$

где неравенство $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}$ выполнено по условию теоремы.

Решив относительно вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ первое неравенство, а затем относительно $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$ второе и третье, получим неравенства $\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \leqslant \theta(\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}$ и $\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{x}$. Объединяя их с неравенством $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$, приходим к двойному неравенству

$$\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant (\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}.$$

Рассмотрим левое неравенство полученного двойного неравенства. Учитывая, что $\mathrm{Tr}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leqslant \mathrm{Tr}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leqslant \mathbb{1}$, все регулярные решения неравенства по лемме 2 имеют вид $\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор такой, что $\boldsymbol{u} \geqslant \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a}$. В результате подстановки решения в двойное неравенство имеем систему

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u} \leqslant (\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}, \qquad \boldsymbol{u} \geqslant \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a}. \quad (20)$$

В силу того, что в первом неравенстве матрица $(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}$ является регулярной по строкам, а вектор $(\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}$ — регулярным, по лемме 1 это неравенство имеет решение $\boldsymbol{u} \leqslant ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}$. Объединяя это неравенство со вторым неравенством системы, находим двусторонние ограничения для вектора $\boldsymbol{u}$ в форме

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}. \quad (21)$$

Проверим, что это двойное неравенство задает непустое множество векторов $\boldsymbol{u}$, т. е. справедливо неравенство $\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a} \leqslant ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}$, которое равносильно неравенству $(\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a}) \leqslant \mathbb{1}$. Раскрыв скобки, получим неравенство, эквивалентное следующей системе неравенств:

$$\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a} \leqslant \mathbb{1},$$
$$\theta^{-2}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a} \leqslant \mathbb{1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти неравенства справедливы. Действительно, из формулы (10) следует неравенство $\theta^{2k-1} \geqslant \boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c}$. Тогда для первого неравенства системы находим (остальные неравенства проверяются аналогично), что

$$\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} =$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{m} \theta^{-(2k-1)}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c} \leqslant \mathbb{1}.$$

Объединяя выражение для вектора $\boldsymbol{x}$ из (20) с ограничениями (21) на вектор параметров $\boldsymbol{u}$ и неравенством для $\boldsymbol{y}$ из (19), приходим к решению в виде (17). □

Решение задачи (9) для регулярной по строкам матрицы $\boldsymbol{A}$ выводится аналогично.

5. Приложение к задаче одноранговой факторизации. В работах [13, 14] было показано, что в терминах max-алгебры задача одноранговой факторизации (аппроксимации) без ограничений может быть сведена к задаче тропической оптимизации (8). Аналогичным образом, записывая целевую функцию задачи (3) в терминах max-алгебры, получим равенство

$$\bigoplus_{(i,j):a_{ij}\neq 0} (x_i^{-1}a_{ij}y_j \oplus x_i a_{ij}^{-1}y_j^{-1}) = \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x},$$

которое выполняется в силу того, что при мультипликативно сопряженном транспонировании нулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ не требуют обращения, а переходят в нулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-}$, обеспечивая согласование обеих частей этого равенства.

Тогда проблема одноранговой факторизации с ограничениями (3) сводится к нахождению всех положительных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые решают такую задачу:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}.$$

Учитывая, что эта задача имеет форму (9), ее решение дают результаты теорем 4 и 5. После нахождения с помощью одной из теорем оптимальных значений векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ исходная матрица $\boldsymbol{A}$ аппроксимируется с помощью произведения $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, которое обеспечивает (приближенное) решение задачи факторизации.

Заметим, что ошибка факторизации (аппроксимации) в log-чебышевском смысле будет равна логарифму величины (10). Минимально возможное значение целевой функции полученной задачи оптимизации равно 1 и отвечает нулевой ошибке аппроксимации в исходной постановке. Таким образом, условием существования точного разложения, удовлетворяющего заданным ограничениям, является выполнение равенства $\theta = 1$.

Рассмотрим пример, который иллюстрирует применение полученных результатов и демонстрирует вычислительную технику решения для задачи небольшой размерности.

Пример. Решим задачу факторизации матрицы $\boldsymbol{A}$ при помощи матрицы $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы, которые удовлетворяют условиям $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{d}$. Обозначим недостающие элементы матрицы символом «·» (точка) и предположим, что

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & 96 & \cdot & 54 \\ 144 & 81 & 160 & \cdot \\ 256 & 128 & 405 & 72 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить результат теоремы 2, дополним недостающие элементы исходной матрицы нулями и составим матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & 96 & 0 & 54 \\ 144 & 81 & 160 & 0 \\ 256 & 128 & 405 & 72 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1/243 & 1/144 & 1/256 \\ 1/96 & 1/81 & 1/128 \\ 0 & 1/160 & 1/405 \\ 1/54 & 0 & 1/72 \end{pmatrix}.$$

Затем построим матрицы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 27/16 & 243/256 \\ 27/32 & 1 & 81/128 \\ 4/3 & 81/32 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9/16 & 405/256 & 9/32 \\ 81/32 & 1 & 405/128 & 9/16 \\ 9/10 & 81/160 & 1 & 8/45 \\ 9/2 & 16/9 & 45/8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя степени матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$, а также их следы, найдем спектральный радиус этих матриц в виде $\mu^2 = 81/64$.

После подстановки полученных значений μ и степеней матриц в правую часть выражения (10) определим, что минимум равен $\theta = 9/8$.

Теперь построим матрицы Клини

$$(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 2/9 \\ 2 & 1 & 5/2 & 4/9 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 8/45 \\ 32/9 & 16/9 & 40/9 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1/216 & 1/144 & 1/288 \\ 1/108 & 1/72 & 1/144 \\ 1/270 & 1/180 & 1/360 \\ 4/243 & 2/81 & 1/81 \end{pmatrix},$$

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулы (11), запишем векторы $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}}$ в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \end{pmatrix} \boldsymbol{w},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1/216 & 1/144 & 1/288 \\ 1/108 & 1/72 & 1/144 \\ 1/270 & 1/180 & 1/360 \\ 4/243 & 2/81 & 1/81 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 2/9 \\ 2 & 1 & 5/2 & 4/9 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 8/45 \\ 32/9 & 16/9 & 40/9 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{w}.$$

Найдем границы для векторов параметров $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{T}}$. После вычисления векторов

$$(\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 2/27 & 1/9 & 1/18 \end{pmatrix},$$
$$(\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

и подстановки в формулы (12) определим границы в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant \boldsymbol{v} \leqslant \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \end{pmatrix} \leqslant \boldsymbol{w} \leqslant \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы упростить найденное решение, заметим, что полученные выше матрицы имеют коллинеарные столбцы, а потому могут быть представлены так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 & 216 \\ 144 & 144 \\ 288 & 288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1/216 & 1/144 & 1/288 \\ 1/108 & 1/72 & 1/144 \\ 1/270 & 1/180 & 1/360 \\ 4/243 & 2/81 & 1/81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/216 \\ 1/108 \\ 1/270 \\ 4/243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 2/9 \\ 2 & 1 & 5/2 & 4/9 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 8/45 \\ 32/9 & 16/9 & 40/9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4/5 & 4/5 \\ 32/9 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Введем новые параметры V_1, W_1 и W_2 по формулам

$$V_1 = v_1 \oplus 3v_2/2 \oplus 3v_3/4, \qquad W_1 = w_1 \oplus w_2/2 \oplus 5w_3/4, \qquad W_2 = 2w_4/9.$$

В новых обозначениях векторы разложения определяются соотношениями

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} V_1 \oplus \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_1 \oplus \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_2,$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1/216 \\ 1/108 \\ 1/270 \\ 4/243 \end{pmatrix} V_1 \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 32/9 \end{pmatrix} W_1 \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 9/2 \end{pmatrix} W_2,$$

а границы для параметров приобретают вид

$$3/2 \leqslant V_1 \leqslant 27/2, \qquad W_1 = 1/16, \qquad 1/90 \leqslant W_2 \leqslant 1/18.$$

Рассмотрим сумму в выражении для вектора $\boldsymbol{x}$. Нетрудно проверить, что второе слагаемое доминирует (не меньше, чем каждое из остальных). Действительно, учитывая значение $W_1 = 1/16$, при всех $V_1 \leqslant 27/2$ и $W_2 \leqslant 1/18$ имеем неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} V_1 \leqslant \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_1 = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_2 \leqslant \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Для первого и третьего слагаемых суммы в выражении для $\boldsymbol{y}$ запишем неравенства

$$\begin{pmatrix} 1/216 \\ 1/108 \\ 1/270 \\ 4/243 \end{pmatrix} V_1 \leqslant \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 32/9 \end{pmatrix} W_1 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 9/2 \end{pmatrix} W_2 \leqslant \begin{pmatrix} 1/18 \\ 1/9 \\ 2/45 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что второе слагаемое доминирует над первым, а также, что первые три элемента второго слагаемого доминируют над соответствующими элементами третьего.

Объединяя полученные результаты, приходим к окончательному решению:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 9W_2/2 \oplus 2/9 \end{pmatrix}, \qquad 4/81 \leqslant W_2 \leqslant 1/18.$$

Нетрудно проверить, что применение теоремы 5 дает такой же результат.

Выбирая значение W_2 равным $4/81$ и $1/18$, получим два вектора

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

которым соответствует одноранговая аппроксимация исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}_1^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 243/4 \\ 144 & 72 & 180 & 81/2 \\ 288 & 144 & 360 & 81 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}_2^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 54 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \\ 288 & 144 & 360 & 72 \end{pmatrix}.$$

6. Заключение. Изучена задача приближенной одноранговой факторизации (мультипликативного разложения в виде произведения векторов) прямоугольных положительных матриц, которые могут иметь пропуски (неопределенные элементы). С помощью методов тропической оптимизации построены прямые аналитические решения задачи для случаев произвольной матрицы и матрицы, которая не имеет полностью неопределенных столбцов (строк). Полученные результаты позволяют находить векторы мультипликативного разложения в явном виде в параметрической форме.

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания и предложения, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. *Aissa-El-Bey A., Seghouane K.* Sparse canonical correlation analysis based on rank-1 matrix approximation and its application for FMRI signals // 2016 IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2016. P. 4678–4682. https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472564

2. *Kannan R., Ishteva M., Park H.* Bounded matrix factorization for recommender system // Knowledge and Information Systems. 2014. Vol. 39. N 3. P. 491–511. https://doi.org/10.1007/s10115-013-0710-2

3. *Xiu X., Kong L.* Rank-one and sparse matrix decomposition for dynamic MRI // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2015. Vol. 5. N 2. P. 127–134. https://doi.org/10.3934/naco.2015.5.127

4. *Belachew M. T., Gillis N.* Solving the maximum clique problem with symmetric rank-one nonnegative matrix approximation // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. Vol. 173. N 1. P. 279–296. https://doi.org/10.1007/s10957-016-1043-6

5. *Krivulin N.* Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems // 2015 12th Intern. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD). IEEE, 2015. P. 162–167. https://doi.org/10.1109/FSKD.2015.7381933

6. *Krivulin N.* Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // 2016 Proceedings of the 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing. SIAM, 2016. P. 62–72. https://doi.org/10.1137/1.9781611974690.ch7

7. *Gillis N.* Introduction to nonnegative matrix factorization // SIAG/OPT Views and News. 2017. Vol. 25. N 1. P. 7–16.

8. *Kumar N. K., Schneider J.* Literature survey on low rank approximation of matrices // Linear and Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65. N 11. P. 2212–2244. https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1267104

9. *Feldman D., Tassa T.* More constraints, smaller coresets: constrained matrix approximation of sparse big data // Proceedings of the 21st ACM SIGKDD Intern. Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM, 2015. P. 249–258. https://doi.org/10.1145/2783258.2783312

10. *Kyrillidis A.* Simple and practical algorithms for ℓ_p-norm low-rank approximation // 34th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Corvallis: AUAI Press, 2018. P. 414–424.

11. *Gillis N., Shitov Y.* Low-rank matrix approximation in the infinity norm // Linear Algebra and its Applications. 2019. Vol. 581. N 15. P. 367–382. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.07.017

12. *Panyukov A., Chaloob K., Mezal Y.* Approximation of a matrix with positive elements by a matrix of a unit rank // 2018 IEEE Symposium on Computer Applications and Industrial Electronics (ISCAIE). IEEE, 2018. P. 234–237. https://doi.org/10.1109/ISCAIE.2018.8405476

13. *Krivulin N. K., Romanova E. Yu.* Rank-one approximation of positive matrices based on methods of tropical mathematics // Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics. 2018. Vol. 51. N 2. P. 133–143. https://doi.org/10.3103/S106345411802005X

14. *Krivulin N. K., Romanova E. Yu.* On the rank-one approximation of positive matrices using tropical optimization methods // Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics. 2019. Vol. 52. N 2. P. 145–153. https://doi.org/10.1134/S1063454119020080

15. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

16. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at work. Princeton: Princeton University Press, 2006. 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics)

17. *McEneaney W. M.* Max-plus methods for nonlinear control and estimation. Boston: Birkhäuser, 2006. 241 p. (Systems and Control: Foundations and Applications) https://doi.org/10.1007/0-8176-4453-9

18. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

19. *Butkovič P.* Max-linear systems. London: Springer, 2010. 272 p. (Springer Monographs in Mathematics) https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

20. *Krivulin N.* A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications. Providence: AMS, 2014. P. 163–177. (Vol. 616 of Contemporary Mathematics) https://doi.org/10.1090/conm/616/12308

21. *Krivulin N.* Tropical optimization problems // Advances in Economics and Optimization. New York: Nova Science Publ., 2014. P. 195–214. (Economic Issues, Problems and Perspectives)

22. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 468. P. 211–232. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

23. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64. N 5. P. 1107–1129. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

Статья поступила в редакцию 18 октября 2020 г.
Статья принята к печати 23 октября 2020 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nkk@math.spbu.ru

Романова Елизавета Юрьевна — студент; romanova.ej@gmail.com

Approximate factorization of positive matrices by using methods of tropical optimization*

N. K. Krivulin, E. Yu. Romanova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K., Romanova E. Yu. Approximate factorization of positive matrices by using methods of tropical optimization. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 4, pp. 357–374. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.402 (In Russian)

The problem of rank-one factorization of positive matrices with missing (unspecified) entries is considered where a matrix is approximated by a product of column and row vectors that are subject to box constraints. The problem is reduced to the constrained approximation of the matrix, using the Chebyshev metric in logarithmic scale, by a matrix of unit rank. Furthermore, the approximation problem is formulated in terms of tropical mathematics that deals with the theory and applications of algebraic systems with idempotent addition. By using methods of tropical optimization, direct analytical solutions to the problem are derived for the case of an arbitrary positive matrix and for the case when the matrix does not contain columns (rows) with all entries missing. The results obtained allow one to find the vectors of the factor decomposition by using expressions in a parametric form which is ready for further analysis and immediate calculation. In conclusion, an example of approximate rank-one factorization of a matrix with missing entries is provided.

Keywords: positive matrix factorization, rank-one matrix approximation, log-Chebyshev distance function, tropical optimization, max-algebra.

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant N 20-010-00145).

References

1. Aissa-El-Bey A., Seghouane K. Sparse canonical correlation analysis based on rank-1 matrix approximation and its application for FMRI signals. *2016 IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP).* IEEE, 2016, pp. 4678–4682. https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472564

2. Kannan R., Ishteva M., Park H. Bounded matrix factorization for recommender system. *Knowledge and Information Systems*, 2014, vol. 39, no. 3, pp. 491–511. https://doi.org/10.1007/s10115-013-0710-2

3. Xiu X., Kong L. Rank-one and sparse matrix decomposition for dynamic MRI. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2015, vol. 5, no. 2, pp. 127–134. https://doi.org/10.3934/naco.2015.5.127

4. Belachew M. T., Gillis N. Solving the maximum clique problem with symmetric rank-one nonnegative matrix approximation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, vol. 173, no. 1, pp. 279–296. https://doi.org/10.1007/s10957-016-1043-6

5. Krivulin N. Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems. *2015 12th Intern. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD).* IEEE, 2015, pp. 162–167. https://doi.org/10.1109/FSKD.2015.7381933

6. Krivulin N. Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons. *2016 Proceedings of the 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing.* SIAM, 2016, pp. 62–72. https://doi.org/10.1137/1.9781611974690.ch7

7. Gillis N. Introduction to nonnegative matrix factorization. *SIAG/OPT Views and News*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 7–16.

8. Kumar N. K., Schneider J. Literature survey on low rank approximation of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 11, pp. 2212–2244. https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1267104

9. Feldman D., Tassa T. More constraints, smaller coresets: constrained matrix approximation of sparse big data. *Proceedings of the 21st ACM SIGKDD Intern. Conference on Knowledge Discovery and Data Mining.* New York, ACM Press, 2015, pp. 249–258. https://doi.org/10.1145/2783258.2783312

10. Kyrillidis A. Simple and practical algorithms for ℓ_p-norm low-rank approximation. *34th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence.* Corvallis, AUAI Press, 2018, pp. 414–424.

11. Gillis N., Shitov Y. Low-rank matrix approximation in the infinity norm. *Linear Algebra and its Applications*, 2019, vol. 581, no. 15, pp. 367–382. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.07.017

12. Panyukov A., Chaloob K., Mezal Y. Approximation of a matrix with positive elements by a matrix of a unit rank. *2018 IEEE Symposium on Computer Applications and Industrial Electronics (ISCAIE).* IEEE, 2018, pp. 234–237. https://doi.org/10.1109/ISCAIE.2018.8405476

13. Krivulin N. K., Romanova E. Yu. Rank-one approximation of positive matrices based on methods of tropical mathematics. *Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 2, pp. 133–143. https://doi.org/10.3103/S106345411802005X

14. Krivulin N. K., Romanova E. Yu. On the rank-one approximation of positive matrices using tropical optimization methods. *Vestnik Saint Petersburg University. Mathematics*, 2019, vol. 52, no. 2, pp. 145–153. https://doi.org/10.1134/S1063454119020080

15. Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N. *Idempotentnyj analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [*Idempotent analysis and its applications in optimal control*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 144 p. (In Russian)

16. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max Plus at work.* Princeton, Princeton University Press, 2006, 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics)

17. McEneaney W. M. *Max-plus methods for nonlinear control and estimation.* Boston, Birkhäuser Press, 2006, 241 p. (Systems and Control: Foundations and Applications) https://doi.org/10.1007/0-8176-4453-9

18. Krivulin N. K. *Metody idempotentnoj algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [*Methods of idempotent algebra for problems in modeling and analysis of complex systems*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2009, 256 p. (In Russian)

19. Butkovič P. *Max-linear systems.* London, Springer Press, 2010, 272 p. (Springer Monographs in Mathematics) https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

20. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example. *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.* Providence, AMS Press, 2014, pp. 163–177. (Vol. 616 of Contemporary Mathematics) https://doi.org/10.1090/conm/616/12308

21. Krivulin N. Tropical optimization problems. *Advances in Economics and Optimization.* New York, Nova Science Publ., 2014, pp. 195–214. (Economic Issues, Problems and Perspectives)

22. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra and its Applications*, 2015, vol. 468, pp. 211–232. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

23. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 5, pp. 1107–1129. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

Received: October 18, 2020.
Accepted: October 23, 2020.

Authors' information:

Nikolai K. Krivulin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; nkk@math.spbu.ru

Elizaveta Yu. Romanova — Student; romanova.ej@gmail.com