УДК 517.968.4+512.625.5 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2020. Т. 16. Вып. 4
MSC 45G05, 65R20

О качественных свойствах решения одной нелинейной граничной задачи в динамической теории p-адических струн*

Х. А. Хачатрян[1,2,3], *А. С. Петросян*[1,4]

[1] Московский государственный университет им. Ломоносова, Российская Федерация,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1
[2] Ереванский государственный университет, Республика Армения,
0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
[3] Институт математики НАН Армении, Республика Армения,
0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/5
[4] Национальный аграрный университет Армении, Республика Армения,
0009, Ереван, ул. Теряна, 74

Для цитирования: *Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О качественных свойствах решения одной нелинейной граничной задачи в динамической теории p-адических струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 423–436. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.407

Рассматривается граничная задача для одного класса сингулярных интегральных уравнений с почти суммарно-разностным ядром и выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой. Указанная задача возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн. Доказывается, что всякое неотрицательное и ограниченное решение такой задачи является непрерывной функцией и разность между пределом и решением представляет из себя суммируемую функцию на положительной полупрямой. Для частного случая устанавливается, что решение есть монотонно неубывающая функция. Рассматривается теорема единственности в классе неотрицательных и ограниченных функций. Приводится конкретный прикладной пример данной граничной задачи.

Ключевые слова: граничная задача, выпуклость, непрерывность, суммируемость, монотонность, предел решения.

1. Введение и формулировка основных результатов. ***Постановка задачи и история вопроса.*** Пусть функция Q определена на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

I) $Q \in C(\mathbb{R}^+)$, $Q \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$;

II) функция Q выпукла вниз на множестве $\mathbb{R}^+$ и $Q(0) = 0$;

III) уравнение $Q(u) = u$ обладает положительным решением η (рис. 1).

Рассмотрим граничную задачу для нелинейного сингулярного интегрального уравнения с почти суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой

$$Q(f(x)) = \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t) f(t)dt, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta, \tag{2}$$

относительно искомой измеримой и ограниченной функции $f(x)$.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

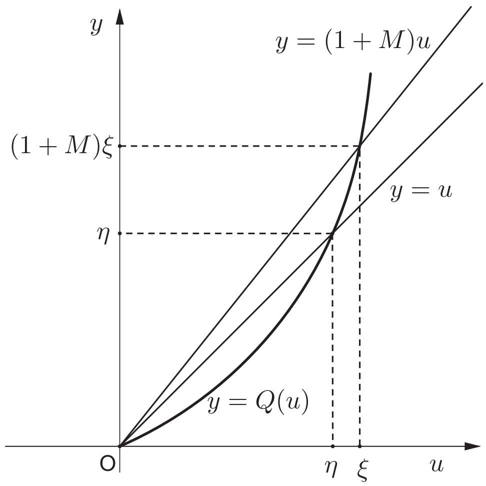

Рис. 1. Точки пересечения графика функции $y = Q(u)$ с прямыми $y = u$ и $y = (1 + M)u$

В уравнении (1) ядро K — определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция, удовлетворяющая таким условиям:

A) $K(x) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}),\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1,$

B) $K(-x) = K(x),\ x \in \mathbb{R}^+,\ K \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$,

C) $\int\limits_0^{\infty} x^2 K(x)dx < +\infty$, где $M(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Функция λ определена на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяет условиям

1) $\lambda(t) \geqslant 1,\ t \in \mathbb{R}^+,\ \lambda - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$,

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = 1$.

Граничная задача (1), (2) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн [1–4]. Когда $Q(u) = u^p,\ p > 2$, нечетное число вида $p = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N},\ K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\ \eta = 1$, а функция λ удовлетворяет условиям 1, 2 и имеет конечное число особенностей в некоторых точках $\{t_k\}_{k=1}^n,\ 1 \leqslant n < +\infty$ (рис. 2), задача (1), (2) первоначально исследовалась в статье [2]. Настоящая работа

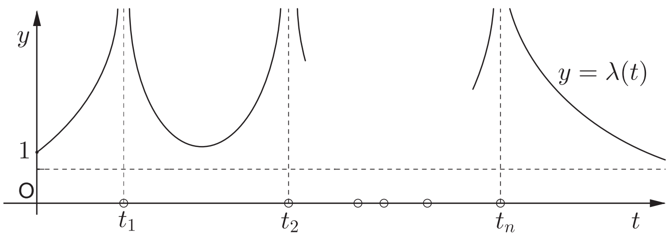

Рис. 2. График функции $y = \lambda(t)$

посвящена вопросам существования ограниченного решения и изучению некоторых качественных свойств построенного решения. Недавно Х. А. Хачатряном [4] была рассмотрена граничная задача (1), (2) в случае, когда $Q(u) = u^p,\ p = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}$

с общим ядром K и функцией λ, удовлетворяющей соответственно условиям A)–C) и 1, 2. В [4] обобщены результаты работы [2] и решена открытая проблема о единственности решения в определенном классе функций. Вопрос построения ограниченного неотрицательного решения граничной задачи (1), (2) в более общем случае, когда нелинейность Q обладает свойствами I)–III), ядро K — свойствами A)–C), а функция λ — свойствами 1, 2, достаточно подробно изучен в статье [5].

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых качественных свойств решения рассматриваемой граничной задачи, а также доказательству единственности решения в достаточно широком классе функций.

Формулировка основных результатов. Основными результатами этой работы являются такие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — неотрицательное и ограниченное решение граничной задачи* (1), (2). *Тогда при условиях* I)–III), A)–C), 1), 2) *данное решение обладает следующими свойствами:*

a) $f \in C(\mathbb{R}^+)$,

b) $f(0) = 0$ *и* $f(x) > 0$ *при* $x > 0$,

c) $f(x) \leqslant \xi,\ x \in \mathbb{R}^+$, *где число* ξ — *положительное решение функционального уравнения* $Q(u) = (1 + M)u$ (рис. 1), *а*

$$M := \int_0^\infty (\lambda(t) - 1)dt \sup_{x\in\mathbb{R}} K(x),$$

d) $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 решение граничной задачи* (1), (2) *единственно в классе неотрицательных и ограниченных на* $\mathbb{R}^+$ *функций.*

2. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Сперва докажем непрерывность решения $f(x)$ на множестве $\mathbb{R}^+$. С этой целью (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} Q(f(x)) = \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))(\lambda(t) - 1)f(t)dt \,+ \\ + \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))f(t)dt, \quad x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $\lambda - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$, а $f \in M(\mathbb{R}^+)$ ($C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций), то, в силу непрерывности свертки ограниченных и суммируемых функций [6], заключаем, что правая часть (3) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}^+)$. Так как $Q \in C(\mathbb{R}^+)$ и $Q \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$, то из (3) вытекает, что $f \in C(\mathbb{R}^+)$.

Теперь убедимся в справедливости утверждения b). С одной стороны, из (1), II), с учетом того, что $f \in C(\mathbb{R}^+)$, $K \in C(\mathbb{R})$ и $K(-x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, следует, что $f(0) = 0$. Докажем теперь, что $f(x) > 0$ при $x > 0$. Так как $K \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$ и $K(-x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то получим неравенство

$$K(x - t) > K(x + t), \quad x > 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

С другой стороны, в силу (2), можно утверждать: существует число $r > 0$ такое, что при $x > r$ имеет место неравенство снизу:

$$f(x) > \frac{\eta}{2}. \tag{5}$$

Учитывая условие 1 и неравенства (4), (5), из (1) находим, что

$$\begin{gathered} Q(f(x)) \geqslant \int\limits_r^\infty (K(x-t) - K(x+t))f(t)dt > \\ > \frac{\eta}{2} \int\limits_r^\infty (K(x-t) - K(x+t))dt > 0 \text{ при } x > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Из монотонности функции Q, в силу (6), приходим к неравенству $f(x) > 0$ при $x > 0$.

Теперь займемся доказательством неравенства c). Обозначим

$$c := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f(x).$$

Из (3) из-за консервативности ядра K (см. условие A)) имеем выражение

$$\begin{gathered} Q(f(x)) \leqslant c \int\limits_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))(\lambda(t) - 1)dt + \\ + c \int\limits_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))dt \leqslant cM + c = (1+M)c. \end{gathered} \tag{7}$$

Так как $Q \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$ и $Q \in C(\mathbb{R}^+)$, то существует $y = Q^{-1}(u)$, причем $Q^{-1} \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$, $Q^{-1} \in C(\mathbb{R}^+)$. В силу сказанного, из (7) следует, что

$$f(x) \leqslant Q^{-1}((1+M)c), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Согласно определению супремума, из (8) получаем, что

$$c \leqslant Q^{-1}((1+M)c),$$

откуда вытекает, что

$$Q(c) \leqslant (1+M)c. \tag{9}$$

Убедимся, что $c \leqslant \xi$. Предположим обратное: $c > \xi$. Тогда, в силу выпуклости вниз функции Q на $\mathbb{R}^+$, будем иметь неравенство (рис. 3)

$$\frac{Q(c)}{c} > \frac{Q(\xi)}{\xi} = 1 + M,$$

из которого, с учетом (9), приходим к противоречию. Следовательно, $c \leqslant \xi$. Таким образом, $f(x) \leqslant c \leqslant \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

Наконец, займемся доказательством включения d). С этой целью, учитывая утверждение c), условия 1 и A), оценим следующую разность:

$$|\eta - Q(f(x))| = \left| \eta \int\limits_0^\infty (K(x-t) + K(x+t))dt - \int\limits_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)f(t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K(x-t)|\eta - \lambda(t)f(t)|dt + \eta\int\limits_x^\infty K(t)dt + \int\limits_0^\infty K(x+t)\lambda(t)f(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|\lambda(t)dt + \eta\int\limits_0^\infty K(x-t)(\lambda(t)-1)dt + \eta\int\limits_x^\infty K(t)dt +$$

$$+\,\xi\int\limits_0^\infty K(x+t)(\lambda(t)-1)dt + \xi\int\limits_x^\infty K(t)dt \leqslant (2\eta+\xi)\int\limits_0^\infty K(x-t)(\lambda(t)-1)dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|dt + (\eta+\xi)\int\limits_x^\infty K(t)dt + \xi\int\limits_0^\infty K(x+t)(\lambda(t)-1)dt.$$

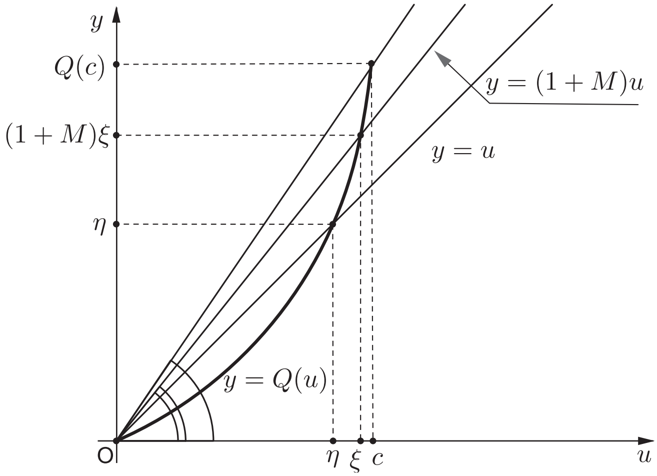

Рис. 3. Пересечение графика функции $y = Q(u)$ и прямой $y = (1 + M)u$

Итак, получаем такое неравенство:

$$|\eta - Q(f(x))| \leqslant (2\eta+\xi)\int\limits_0^\infty K(x-t)(\lambda(t)-1)dt + \xi\int\limits_0^\infty K(x+t)(\lambda(t)-1)dt +$$
$$+\,(\eta+\xi)\int\limits_x^\infty K(t)dt + \int\limits_0^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|dt := I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{10}$$

Заметим, что, в силу конечности первого момента ядра K из теоремы Фубини [7], следует, что

$$I_3 \in L_1(\mathbb{R}^+)$$

и

$$\int\limits_0^\infty I_3(x)dx = (\eta+\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt < +\infty.$$

Так как $K \in L_1(\mathbb{R})$ и $\lambda - 1 \in L_1(\mathbb{R})$, то, опять используя теорему Фубини, заключаем, что $I_1, I_2 \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Оценим интеграл I_4:

$$I_4 \leqslant (\xi + \eta) \int_0^r K(x-t)dt + \int_r^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|dt, \tag{11}$$

где число $r > 0$ определяется в (5). Убедимся, что

$$\int_0^r K(x-t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{12}$$

Пусть $A > 0$ — произвольное число. Оценим интеграл с учетом конечности первого момента ядра K:

$$\int_0^A \int_0^r K(x-t)dtdx = \int_0^A \int_{x-r}^x K(y)dydx = \int_0^A \int_{x-r}^\infty K(y)dydx - \int_0^A \int_x^\infty K(y)dydx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_{x-r}^\infty K(y)dydx + \int_0^\infty yK(y)dy = \int_{-r}^\infty K(y) \int_0^{y+r} dxdy + \int_0^\infty yK(y)dy =$$

$$= \int_{-r}^\infty yK(y)dy + r\int_{-r}^\infty K(y)dy + \int_0^\infty yK(y)dy < +\infty.$$

Считая, что в полученном неравенстве число $A \to +\infty$, приходим к утверждению (12) и к такому неравенству:

$$\int_0^\infty \int_0^r K(x-t)dtdx \leqslant \int_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy + \int_0^\infty yK(y)dy. \tag{13}$$

Пусть $R > r$ — произвольное число. Проинтегрируем обе части неравенства (10) в пределах от r до R. Учитывая условия B), 1 и соотношения (12), (13), а также интегрируемость функций I_1, I_2, I_3, будем иметь выражение

$$\int_r^R |\eta - Q(f(x))|dx \leqslant (2\eta + \xi)\int_0^\infty (\lambda(t) - 1)dt + \frac{\xi}{2}\int_0^\infty (\lambda(t)-1)dt + (\eta + \xi)\int_0^\infty tK(t)dt +$$

$$+ (\eta + \xi)\left(\int_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy + \int_0^\infty yK(y)dy\right) + \int_r^R \int_r^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|dtdx =$$

$$= \left(2\eta + \frac{3\xi}{2}\right)\int_0^\infty (\lambda(t)-1)dt + (2\eta + 2\xi)\int_0^\infty tK(t)dt + (\eta+\xi)\int_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy +$$

$$+ \int_r^R \int_r^R K(x-t)|\eta - f(t)|dtdx + \int_r^R \int_R^\infty K(x-t)|\eta - f(t)|dtdx \leqslant \left(2\eta + \frac{3\xi}{2}\right)\int_0^\infty (\lambda(t)-1)dt +$$

$$+ (2\eta+2\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt + (\eta+\xi)\int\limits_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy +$$

$$+ (\eta+\xi)\int\limits_r^R\int\limits_R^\infty K(x-t)dtdx + \int\limits_r^R\int\limits_r^R K(x-t)|\eta - f(t)|dtdx =$$

$$= \left(2\eta+\frac{3\xi}{2}\right)\int\limits_0^\infty(\lambda(t)-1)dt + (2\eta+2\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt +$$

$$+ (\eta+\xi)\int\limits_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy + (\eta+\xi)\int\limits_r^R\int\limits_{R-x}^\infty K(\tau)d\tau dx +$$

$$+ \int\limits_r^R\int\limits_r^R K(x-t)|\eta-f(t)|dtdx \leqslant \left(2\eta+\frac{3\xi}{2}\right)\int\limits_0^\infty(\lambda(t)-1)dt +$$

$$+ (2\eta+2\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt + (\eta+\xi)\int\limits_{-r}^\infty (r+y)K(y)dy + (\eta+\xi)\int\limits_0^R\int\limits_{R-x}^\infty K(\tau)d\tau dx +$$

$$+ \int\limits_r^R\int\limits_r^R K(x-t)|\eta-f(t)|dtdx \leqslant C_r + \int\limits_r^R\int\limits_r^R K(x-t)|\eta-f(t)|dtdx,$$

в котором

$$C_r := \left(2\eta+\frac{3\xi}{2}\right)\int\limits_0^\infty(\lambda(t)-1)dt + (2\eta+2\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt +$$

$$+ (\eta+\xi)\int\limits_{-r}^\infty K(y)(y+r)dy + (\eta+\xi)\int\limits_0^\infty\int\limits_y^\infty K(\tau)d\tau dy = \tag{14}$$

$$= \left(2\eta+\frac{3\xi}{2}\right)\int\limits_0^\infty(\lambda(t)-1)dt + (3\eta+3\xi)\int\limits_0^\infty tK(t)dt + (\eta+\xi)\int\limits_{-r}^\infty K(y)(y+r)dy.$$

Итак,

$$\int\limits_r^R |\eta - Q(f(x))|dx \leqslant C_r + \int\limits_r^R\int\limits_r^R K(x-t)|\eta-f(t)|dtdx, \tag{15}$$

где число C_r задается в соответствии с (14).

Из (15), в силу условия A), следует также, что

$$\int\limits_r^R |\eta - Q(f(x))|dx \leqslant C_r + \int\limits_r^R |\eta - f(t)|dt. \tag{16}$$

Введем следующие измеримые множества:

$$E_1^R := \{x \in [r, R] : f(x) \leqslant \eta\},$$

$$E_2^R := \{x \in [r, R] : f(x) > \eta\}.$$

Учитывая свойства I)–III) для функции Q, неравенство (16) можно переписать в виде

$$\int\limits_{E_1^R} (\eta - Q(f(x)))dx + \int\limits_{E_2^R} (Q(f(x)) - \eta)dx \leqslant C_r + \int\limits_r^R |\eta - f(x)|dx. \qquad (17)$$

Из выпуклости вниз функции Q с учетом неравенства (5) вытекает, что если $x \in E_2^R$, то $\alpha > \beta$ (рис. 4).

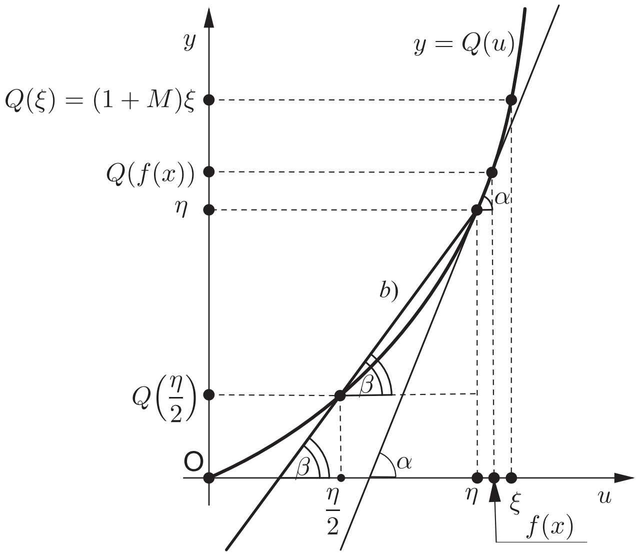

Рис. 4. Пересечение графика функции $y = Q(u)$ и прямой $y = \frac{2(\eta - Q(\frac{\eta}{2}))}{\eta}u + 2Q\left(\frac{\eta}{2}\right) - \eta$

Следовательно,

$$\frac{Q(f(x)) - \eta}{f(x) - \eta} = \mathrm{tg}\alpha > \mathrm{tg}\beta = \frac{\eta - \mathrm{Q}(\frac{\eta}{2})}{\frac{\eta}{2}}.$$

Итак, при $x \in E_2^R$

$$Q(f(x)) - \eta \geqslant \left(2 - \frac{2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)(f(x) - \eta). \qquad (18)$$

Пусть теперь $x \in E_1^R$. Проведя прямую через точки (η, η) и $(\frac{\eta}{2}, Q(\frac{\eta}{2}))$ (рис. 5), приходим к уравнению

$$y = \frac{2(\eta - Q(\frac{\eta}{2}))}{\eta}u + 2Q\left(\frac{\eta}{2}\right) - \eta. \qquad (19)$$

В силу монотонности и выпуклости функций Q, из (19) получим, что

$$Q(f(x)) \leqslant \frac{2\eta - 2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}f(x) + 2Q\left(\frac{\eta}{2}\right) - \eta$$

или

$$\eta - Q(f(x)) \geqslant \left(2 - \frac{2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)(\eta - f(x)) \text{ при } x \in E_1^R. \tag{20}$$

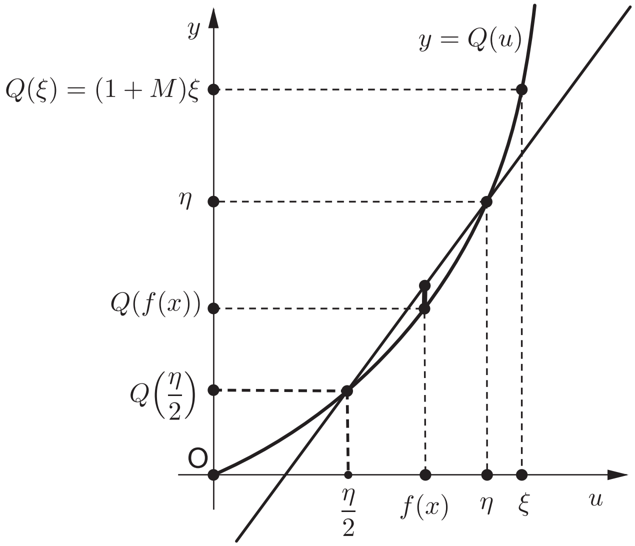

Рис. 5. Графики функций $y = Q(u)$ и $y = \frac{2(\eta - Q(\frac{\eta}{2}))}{\eta}u + 2Q\left(\frac{\eta}{2}\right) - \eta$

Учитывая (18) и (20), из (17) приходим к неравенству

$$\left(2 - \frac{2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)\int\limits_{E_1^R}(\eta - f(x))dx + \left(2 - \frac{2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)\int\limits_{E_2^R}(f(x) - \eta)dx \leqslant C_r + \int\limits_r^R|\eta - f(x)|dx,$$

из которого вытекает, что

$$2\left(1 - \frac{Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)\left(\int\limits_{E_1^R}(\eta - f(x))dx + \int\limits_{E_2^R}(f(x) - \eta)dx\right) \leqslant C_r + \int\limits_r^R|\eta - f(x)|dx$$

или

$$2\left(1 - \frac{Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)\int\limits_r^R|\eta - f(x)|dx \leqslant C_r + \int\limits_r^R|\eta - f(x)|dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_r^R|\eta - f(x)|dx \leqslant C_r\left(1 - \frac{2Q(\frac{\eta}{2})}{\eta}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Приняв, что $R \to +\infty$ в (21), получим, что $\eta - f \in L_1(r, +\infty)$. Так как $\eta - f \in L_1(0, r)$ (в силу непрерывности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^+$), то из вышеприведенного приходим к завершению доказательства.

Замечание. В частном случае, когда $\lambda(t) \equiv 1$, в работе [8] было доказано, что задача (1), (2) в классе функций

$$\mathfrak{M} := \{f(x) : f(x) > 0, x > 0, \eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)\}$$

имеет единственное решение. Но вместе с тем в [8] (а в работе [9] для систем интегральных уравнений) также установлено, что для уравнения (1) при $\lambda(t) \equiv 1$ есть неотрицательное ограниченное монотонно неубывающее решение f, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ и $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, заключаем, что если $f(x)$ — неотрицательное и ограниченное решение граничной задачи (1), (2) при $\lambda(t) \equiv 1$, то $f(x)$ является монотонно неубывающей функцией на $\mathbb{R}^+$. Более того, при $\lambda(t) \equiv 1$ решение граничной задачи (1), (2) в классе неотрицательных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$ единственное.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что у задачи (1), (2) в классе неотрицательных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций два разных решения: f и $\tilde{f}$. В силу теоремы 1, функции f и $\tilde{f}$ обладают свойствами a)–d). Из d) сразу следует, что $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Если предположим, что задача (1), (2) имеет два разных неотрицательных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ решения, то, в силу утверждения b) теоремы 1, существует $x_0 > 0$ такое, что $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$.

Из утверждения a) теоремы 1, с одной стороны, вытекает, что существует число $\delta \in (0, x_0)$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x) \neq \tilde{f}(x)$. Но, с другой стороны, из (1) с учетом (4) имеем неравенство

$$|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| \leqslant \int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)]\lambda(t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt. \tag{22}$$

Заметим, что

$$I(x) := \lambda(x)f(x)\int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)]\lambda(t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{23}$$

Действительно, так как $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$, $f \in M(\mathbb{R}^+)$, а $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то, представив функцию $I(x)$ в виде

$$I(x) = (\lambda(x) - 1)f(x)\int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)](\lambda(t) - 1)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt +$$

$$+ (\lambda(x) - 1)f(x)\int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)]|f(t) - \tilde{f}(t)|dt +$$

$$+ f(x)\int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)](\lambda(t) - 1)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt +$$

$$+ f(x)\int\limits_0^\infty [K(x-t) - K(x+t)]|f(t) - \tilde{f}(t)|dt,$$

заключаем, что $I \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Умножим обе части неравенства (22) на функцию $\lambda(x)f(x)$ и, в силу (23), проинтегрируем обе части полученного неравенства в пределах от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^\infty \lambda(x)f(x)|Q(f(x))-Q(\tilde{f}(x))|dx \leqslant \int_0^\infty \lambda(x)f(x)\int_0^\infty [K(x-t)-K(x+t)]\lambda(t)|f(t)-\tilde{f}(t)|dt.$$

Используя (1), четность ядра K и теорему Фубини, из последнего неравенства приходим к следующей оценке:

$$\int_0^\infty \lambda(x)(f(x))|Q(f(x))-Q(\tilde{f}(x))|-Q(f(x))|f(x)-\tilde{f}(x)|dx \leqslant 0.$$

Далее, совершая аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 2, согласно соответствующему результату работы [8], приходим к противоречию. Теорема доказана.

3. Приложение задачи (1), (2) **в теории p-адических открыто-замкнутых струн.** В динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн возникает следующая система нелинейных псевдодифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие этих струн [1–3, 10–12]:

$$\begin{cases} p^{-\frac{1}{4}\Box}\psi = \psi^{p^2} + \alpha^2 \frac{p-1}{2p}\psi^{\frac{p(p-1)}{2}}(\varphi^{p+1}-1), \\ p^{-\frac{1}{2}\Box}\varphi = \varphi^p\psi^{\frac{p(p-1)}{2}}, \quad p>2 - \text{ простое число}, \end{cases} \tag{24}$$

относительно искомых функций φ и ψ. Неизвестные функции φ и ψ описывают тахионные поля для открытых и замкнутых струн, число α — константа взаимодействия между открытыми и замкнутыми струнными секторами, а $\Box$ — оператор Даламбера. В (24), совершив предельный переход при $\alpha \to 0$, приходим к упрощенной системе уравнений динамики [2, 4]

$$\begin{cases} p^{-\frac{1}{4}\Box}\psi = \psi^{p^2}, \\ p^{-\frac{1}{2}\Box}\varphi = \varphi^p\psi^{\frac{p(p-1)}{2}}. \end{cases} \tag{25}$$

В одномерном случае, когда $\Box = \frac{d^2}{dt^2}$, система (25) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений [2]

$$\psi^{p^2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)^2}\psi(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{26}$$

$$\varphi^p(x)\psi^{\frac{p(p-1)}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2}\varphi(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{27}$$

В работе [2] были исследованы такие граничные задачи:

- уравнение (26) с граничным условием $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi(x)=1$,
- уравнение (27) с граничным условием $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\pm 1$.

В частности, в [2] доказано, что если $p=1 \pmod 4$, то

$$\lambda(t) := \psi^{-\frac{p(p-1)}{2}}(t) > 1,\ \lambda(-t)=\lambda(t), \quad t\in\mathbb{R},$$
$$\lambda - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \lim_{t\to\pm\infty}\lambda(t) = 1.$$

Обозначим

$$\Phi(t) = \varphi(t)\psi^{\frac{p(p-1)}{2}}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда относительно функции $\Phi(t)$ приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\Phi^p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \Phi(t)\lambda(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

с граничным условием

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Phi(x) = \pm 1. \tag{29}$$

Легко можно убедиться, что если $f(x)$ является непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением граничной задачи (1), (2) с ядром $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ и нелинейностью $Q(u) = u^p$, $p > 2$, $p = 1 \pmod 4$, то нечетное продолжение данного решения на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$

$$\Phi(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ -f(-x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

будет решением граничной задачи (28), (29).

Литература

1. *Arefeva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I. V.* Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // Phys. Lett. B. 1988. Vol. 212. N 3. P. 283–291.

2. *Владимиров В. С.* О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теор. мат. физ. 2006. Т. 149. Вып. 3. С. 354–367.

3. *Brekke L., Freund P. G. O.* p-Adic numbers in physics // Phys. Rep. 1993. Vol. 233. N 1. P. 1–66.

4. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p-адических открыто-замкнутых струн // Теор. мат. физ. 2019. Т. 200. Вып. 1. С. 106–117.

5. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки // Труды ММО. 2020. Т. 81. Вып. 1. С. 3–40.

6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 444 с.

7. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. V. М.: Наука, 1981. 544 с.

8. *Khachatryan Kh. A.* Existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem for the convolution integral equation with monotonic nonlinearity // Izvestiya. Mathematics. 2020. Vol. 84. N 4. P. 807–815. https://doi.org/10.1070/IM8898

9. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. Вып. 2. С. 164–181.

10. *Aref'eva I. Ya., Koshelev A. S., Joukovskaya L. V.* Time evolution in superstring field theory on non-BPS brane. I. Rolling tachyon and energy-momentum conservation // J. High Energy Phys. 2003. Vol. 012. N 9. P. 1–15.

11. *Арефьева И. Я.* Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2004. Т. 245. С. 47–54.

12. *Ohmori K.* Toward open-closed string theoretical description of rolling tachyon // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 69. N 2. P. 026008, hep-th/0306096.

Статья поступила в редакцию 21 января 2020 г.
Статья принята к печати 23 октября 2020 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Хачатрян Хачатур Агавардович — д-р физ.-мат. наук, проф.; khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна — канд. физ.-мат. наук, доц.; haykuhi25@mail.ru

On the qualitative properties of the solution of a nonlinear boundary value problem in the dynamic theory of p-adic strings*

Kh. A. Khachatryan[1,2,3], *H. S. Petrosyan*[1,4]

[1] Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation
[2] Yerevan State University, 1, Alex Manoogian ul., Yerevan, 0025, Republic of Armenia
[3] National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, 24/5, Marshal Baghramyan pr., Yerevan, 0019, Republic of Armenia
[4] Armenian National Agrarian University, 74, ul. Teryana, Yerevan, 0009, Republic of Armenia

For citation: Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the qualitative properties of the solution of a nonlinear boundary value problem in the dynamic theory of p-adic strings. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 4, pp. 423–436. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.407 (In Russian)

The article considers a boundary value problem for a class of singular integral equations with an almost total-difference kernel and convex nonlinearity on the positive half-line. This problem arises in the dynamic theory of p-adic open-closed strings. It is proved that any nonnegative and bounded solution of a given boundary value problem is a continuous function and the difference between the limit and the solution is itself an integrable function on the positive half-line. For a particular case, it is proved that the solution is a monotonically non-decreasing function. A uniqueness theorem is established in the class of nonnegative and bounded functions. At the conclusion of the article, a specific applied example of this boundary problem is given.

Keywords: boundary value problem, convexity, continuity, summability, monotonicity, solution limit.

References

1. Arefeva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I. V. Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields. *Phys. Lett. B*, 1988, vol. 212, no. 3, pp. 283–291.

2. Vladimirov V. S. O nelineinyh uravneniyah p-aditcheskih otkrytyh, zamknutyh i otkryto-zamknutyh strun [Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings]. *Theor. and Math. Phys.*, 2006, vol. 149, iss. 3, pp. 354–367. (In Russian)

3. Brekke L., Freund P. G. O. p-Adic numbers in physics. *Phys. Rep.*, 1993, vol. 233, no. 1, pp. 1–66.

4. Khachatryan Kh. A. O razreshimosti nekotoryh klassov nelineinyh singuliarnyh kraevyh zadach, voznikauschih v teorii p-aditcheskih otkryto-zamknutyh strun [Solvability of some classes of nonlinear singular boundary value problems in the theory of p-adic open-closed strings]. *Theor. and Math. Phys.*, 2019, vol. 200, iss. 1, pp. 106–117. (In Russian)

5. Khachatryan Kh. A. O razreshimosti nekotoryh nelineinyh granichnyh zadach dlia singuliarnyh integral'nyh uravneniy tipa sviortki [On the solvability of some nonlinear boundary value problems for convolution type singular integral equations]. *Trudy MMO*, 2020, vol. 81, iss. 1, pp. 3–40. (In Russian)

6. Rudin U. *Functional analysis.* London, McGraw-Hill Science/Engineering/Math. Publ., 1973, 448 p. (Russ. ed.: Rudin U. *Functsional'niy analiz.* Moscow, Mir Publ., 1975, 444 p.)

7. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [*Elements of the theory of functions and functional analysis*]. 5th ed. Moscow, Nauka Publ., 1981, 544 p. (In Russian)

8. Khachatryan Kh. A. Existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem for the convolution integral equation with monotonic nonlinearity. *Izvestiya. Mathematics*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 807–815. https://doi.org/10.1070/IM8898

9. Khachatryan Kh. A. O razreshimosti odnoy sistemy nelineinyh integral'nyh uravneniy tipa Hammershteina na priamoy [The solvability of a system of nonlinear integral equations of Hammerstein type on the whole line]. *Proceedings of Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 164–181. (In Russian)

* This work was supported by the Russian Science Foundation (project N 19-11-00223).

10. Aref'eva I. Ya., Koshelev A. S., Joukovskaya L. V. Time evolution in superstring field theory on non-BPS brane. I. Rolling tachyon and energy-momentum conservation. *J. High Energy Phys.*, 2003, vol. 012, no. 9, pp. 1–15.

11. Aref'eva I. Ya. Skatyvauschiesia reshenia polevyh uravneniy na neekstrimal'nyh branah i v p-aditcheskih strunah [Rolling tachyon on non-BPS branes and p-adic strings]. *Proceedings of V. A. Steklov Mathem. institute*, 2004, vol. 245, pp. 40–47. (In Russian)

12. Ohmori K. Toward open-closed string theoretical description of rolling tachyon. *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 69, no. 2, pp. 026008, hep-th/0306096.

Received: January 21, 2020.
Accepted: October 23, 2020.

Authors' information:

Khachatur A. Khachatryan — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; khach82@rambler.ru

Haykanush S. Petrosyan — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; haykuhi25@mail.ru