УДК 517.97 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика ... 2021. Т. 17. Вып. 2
MSC 49K99

Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах

Е. Д. Котина, Д. А. Овсянников

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Котина Е. Д., Овсянников Д. А.* Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 213–224. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210

Предлагается новая математическая модель оптимизации дискретных систем. Исследуются программное движение и ансамбль (пучок) возмущенных движений. При этом рассматривается совместная оптимизация гладких и негладких функционалов, заданных на программном и возмущенных движениях. Даются вариация функционала и необходимые условия оптимальности. Разработанный математический аппарат позволяет решать нестандартные задачи управления и оптимизации в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: дискретные системы, вариация функционала, гладкие и негладкие функционалы, оптимизация, оптимальное управление.

1. Введение. Дискретные системы приобретают все большее значение в теории и практическом применении в задачах оптимального управления и оптимизации. Это связано с тем, что многие задачи описываются дискретными уравнениями, поскольку на практике информация о состоянии процесса поступает дискретно, и управление динамическим процессом реализуется чаще всего в дискретные моменты времени. Стандартный подход к проектированию различных управляемых систем предполагает первоначальный расчет программного движения и последующее исследование возмущенных движений с использованием уравнений в отклонениях. Такой подход, однако, не всегда приводит к желаемым результатам. При анализе возмущенных движений оказывается, что их динамические характеристики не всегда удовлетворительны с той или иной точки зрения, что является следствием существенной зависимости возмущенных движений от программного движения. В настоящей работе предложена математическая модель, позволяющая проводить одновременно оптимизацию программного движения и ансамбля возмущенных движений в дискретных системах. При этом рассматривается совместная оптимизация гладких и негладких функционалов.

Дискретным системам и их приложениям посвящено много работ разных авторов [1–6]. Развиваются два подхода к дискретным системам. Первый основан на использовании принципа оптимальности Р. Беллмана. Второй подход является вариационным и связан с аппаратом принципа максимума Л. Понтрягина, который впервые был разработан для решения задач оптимального управления непрерывными динамическими системами.

Классические постановки задач оптимального управления в дискретных системах достаточно хорошо известны и исследованы [1]. Эти задачи можно рассматривать как задачи управления отдельными траекториями. Наряду с ними разрабатываются и нестандартные задачи теории оптимального управления, в частности, задачи управления ансамблями траекторий (пучками траекторий) при различных критериях качества в непрерывных и дискретных системах [2, 3, 7]. Такие задачи можно рассматривать так же, как задачи управления с неполной информацией об исходных данных, когда точное начальное состояние объекта неизвестно и необходимо управлять ансамблем траекторий, исходящих из некоторого допустимого набора начальных условий управляемого объекта. Далее исследовались нестандартные задачи совместной оптимизации программного движения и ансамбля возмущенных движений как в непрерывных [8–10], так и в дискретных системах [4–6]. Интересное развитие получили и задачи одновременной оптимизации гладких и негладких функционалов, заданных на программном движении и пучке возмущенных траекторий в непрерывных системах [11–14].

Данная статья посвящена построению новых методов оптимизации связки гладких и негладких функционалов в дискретных системах.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дискретных уравнений следующего вида:

$$x\,(k+1) = f\,(k, x\,(k),\ u\,(k)), \tag{1}$$

$$y\,(k+1) = F\,(k, x\,(k),\ y\,(k),\ u\,(k)), \tag{2}$$

$$k = 0,\ \ldots,\ N-1,$$

где $x\,(k)$ — n-мерный фазовый вектор, характеризующий программное движение; $y\,(k)$ — m-мерный фазовый вектор возмущенного движения; $u\,(k)$ — r-мерный вектор; $f\,(k) = f\,(k, x\,(k),\ u\,(k))$ — n-мерная векторная функция; $F\,(k) = F\,(k, x\,(k),$ $y\,(k), u\,(k)$ — m-мерная векторная функция. Относительно $f\,(k)$ предполагаем, что при каждом $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ она определена и непрерывна на множестве $\Omega_x \times U\,(k)$ по совокупности аргументов $(x\,(k),\ u\,(k))$ вместе с частными производными по ним. Будем так же считать, что при каждом $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ $F\,(k)$ определена и непрерывна на множестве $\Omega_x \times \Omega_y \times U\,(k)$ по совокупности аргументов $(x\,(k),\ y\,(k),\ u\,(k))$ вместе с частными производными до второго порядка включительно. Здесь Ω_x — область в R^n, Ω_y — область в R^m, $U\,(k)$ — компактное множество в R^r, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. При этом примем, что якобиан $J_k = J\,(k, x\,(k), y\,(k), u\,(k)) = |\frac{\partial F(k, x(k), y(k), u(k))}{\partial y(k)}|$ отличен от нуля при всех изменениях $k, x\,(k), y\,(k), u\,(k)$. Таким образом, при заданном векторе $u\,(k)$ вектор $x\,(k)$ и вектор $y\,(k)$ однозначно определяют фазовое состояние $y\,(k+1)$ возмущенной частицы на k-м шаге и обратно, по $y\,(k+1)$ — состояние возмущенной частицы на предыдущем шаге.

Уравнение (1) описывает динамику программного движения, уравнение (2) — возмущенного движения.

Предполагаем далее, что начальное условие $x\,(0) = x_0$ задано $(x_0 \in \Omega_x \subset R^n)$ и начальное состояние системы (2) описывается множеством M_0 — компактным множеством в R^m. Последовательность векторов $\{u\,(0), u\,(1), \ldots, u\,(N-1)\}$ будем называть управлением и обозначать для краткости u, а соответствующую этому управлению последовательность векторов $\{x\,(0), x\,(1), \ldots, x\,(N)\}$ — траекторией программного движения и обозначать $x = x\,(x_0, u)$. Будем обозначать через $x\,(k) = x\,(k, x_0, u)$ фазовое состояние программной частицы на k-м шаге. Аналогично, последовательность векторов $\{y\,(0), y\,(1), \ldots, y\,(N)\}$ будем называть траекторией возмущенного движения и обозначать $y\,(k) = y\,(k, x, y_0, u)$, а через $y\,(k) = y\,(k, x, y_0, u)$ — фазовое состояние частицы на k-м шаге.

Множество траекторий $y(x, y_0, u)$, соответствующих начальному состоянию x_0, управлению u и различным начальным состояниям $y_0 \in M_0$, будем называть ансамблем траекторий, или пучком траекторий, или просто пучком. Фазовое состояние пучка на k-м шаге будем называть также сечением пучка траекторий и обозначать через $M_{k,u}$, т. е.

$$M_{k,u} = \{y(k) : y(k, x, y_0, u),\, y_0 \in M_0\}.$$

Управления, удовлетворяющие условиям $u(k) \in U(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, будем называть допустимыми.

На траекториях системы введем функционал качества, позволяющий одновременно оценить динамику программного и возмущенных движений и проводить их совместную оптимизацию:

$$I(u) = I_1(u) + I_2(u), \tag{3}$$

где

$$I_1(u) = \sum_{k=1}^{N-1} g(k, x(k)) + g(N, x(N)), \tag{4}$$

$$I_2(u) = \max_{y(N) \in M_{N,u}} \Phi(y(N)). \tag{5}$$

Здесь $g(k) = g(k, x(k))$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, и $g_N = g(N, x(N))$ — непрерывно дифференцируемые функции по $x, \Phi(y(N))$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая по y функция.

Нашей задачей является минимизация функционала (3) по всем допустимым управлениям.

Рассмотрим допустимые управления u и $\tilde{u}$. Соответствующие им траектории будем обозначать $x(x_0, u)$ и $\tilde{x}(x_0, \tilde{u})$, траектории возмущенных движений — $y(x, y_0, u)$ и $\tilde{y}(\tilde{x}, y_0, \tilde{u})$.

Разность $\tilde{u}(k) - u(k) = \Delta u(k)$ будем называть вариацией управления u на k-м шаге, разность $\Delta x(k) = \Delta x(k, x_k) = \tilde{x}(k, x_0, \tilde{u}) - x(k, x_0, u)$ — приращением траектории программного движения $x(x_0, u)$ на k-м шаге, а разность $\Delta y(k) = \Delta y(k, y_k) = \tilde{y}(\tilde{x}, y_0, \tilde{u}) - y(x, y_0, u)$ — приращением траектории возмущенного движения на k-м шаге. Соответственно Δu и $\Delta x, \Delta y$ будем называть вариацией управления u и приращениями траекторий $x(x_0, u)$ и $y(x, y_0, u)$.

В силу свойств непрерывности $\|\Delta x\| \to 0$ при $\|\Delta u\| \to 0$ и $\|\Delta y\| \to 0$ при $\|\Delta u\| \to 0$ равномерно по $y_0 \in M_0$, где $\|\Delta u\| = \max_{k=0,1,\ldots,N-1} \|\Delta u(k)\|$, здесь $\|\Delta u(k)\| = \sqrt{(\Delta u(k), \Delta u(k))}$. Нормы Δx и Δy определяются аналогично. Обозначим через $\delta x(k), \delta y(k)$ вариации траекторий системы (1), (2) при допустимой вариации Δu и данном u. Выпишем для системы (1), (2) систему уравнений в вариациях

$$\delta x(k+1) = \frac{\partial f(k)}{\partial x(k)} \delta x(k) + \frac{\partial f(k)}{\partial u(k)} \Delta u(k), \tag{6}$$

$$\delta y(k+1) = \frac{\partial F(k)}{\partial x(k)} \delta x(k) + \frac{\partial F(k)}{\partial y(k)} \delta y(k) + \frac{\partial F(k)}{\partial u(k)} \Delta u(k), \tag{7}$$

$$k = 0, \ldots, N-1.$$

При этом считаем, что имеют место начальные условия

$$\delta x\,(0) = 0, \;\; \delta y\,(0) = 0. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что $\|\Delta x - \delta x\|$ и $\|\Delta y - \delta y\|$ есть величины более высокого порядка малости, чем $\|\Delta u\|$, равномерно по $y_0 \in M_0$ [3].

3. Вариация функционала $I_1\,(u)$. Найдем приращение функционала (4) при допустимых управлениях u и $\tilde{u}$:

$$I_1\,(u + \Delta u) - I_1\,(u) = \sum_{k=1}^{N-1} g\,(k, \tilde{x}\,(k)) - \sum_{k=1}^{N-1} g\,(k, x\,(k)) + g_N\,(\tilde{x}_N) - g_N\,(x_N) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} g\,(k, x_k + \Delta x_k) - \sum_{k=1}^{N-1} g\,(k, x\,(k)) + g_N\,(x_N + \Delta x_N) - g_N\,(x_N) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \left[g_k\,(x_k) + \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \Delta x_k + o\,(\|\Delta x_k\|) - g_k\,(x_k) \right] + g_N\,(x_N) + \frac{\partial g_N}{\partial x_N} \Delta x_N + o\,(\|\Delta x_N\|) -$$

$$- g_N\,(x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \Delta x_k + o\,(\|\Delta x\|)\,.$$

Выделяя линейные члены по $\Delta x_k, \Delta u_k$ и учитывая, что величина $\|\Delta x\,(k, x_k) - \delta x\,(k, x_k)\,\|$ имеет более высокий порядок малости, чем $\|\Delta u\|$, получаем равенство

$$\Delta I_1 = \delta I_1 + o\,(\|\Delta u\|)\,,$$

где

$$\delta I_1 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial g_N}{\partial x_N} \delta x_N. \tag{9}$$

Будем называть δI_1 вариацией функционала $I_1\,(u)$.

4. Исследование функционала $I_2\,(u)$. В данном разделе опишем задачу управления в дискретных системах при минимаксном критерии. Рассмотрим систему (1), (2) и функционал (5).

Здесь, как уже предположили ранее, $\Phi\,(y\,(N)) = \Phi\,(y_N)$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая по y функция, определенная в Ω_y — в области в R^m.

Выберем из множества M_0 те начальные фазовые состояния y_0, которые в момент N доставляют функции $\Phi\,(y\,(N))$ максимум на $M_{N,u}$ по $y\,(N)$ при фиксированном управлении u и некотором x_0. Подмножество точек y_0 множества M_0 обозначим через Y_0:

$$Y_0\,(u) = \{y_0 \in M_0 : \Phi\,(y\,(N)) = \Phi\,(y\,(N, x\,(x_0, u), y_0, u)) = \max_{y_N \in M_{N,u}} \Phi\,(y_N)\}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть $\tilde{u}_\varepsilon = u + \varepsilon \Delta u$ — допустимое управление при $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}), \tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда по любому $\delta > 0$ существует $\varepsilon\,(\delta) > 0$ такое, что при каждом достаточно малом $0 < \varepsilon < \varepsilon\,(\delta)$*

$$Y_0\left(u+\varepsilon\Delta u\right)\in O_\delta\left(Y_0\left(u\right)\right). \tag{11}$$

Здесь $O_\delta\left(Y_0\left(u\right)\right)$ есть δ-окрестность множества максимумов допустимого управления u.

Доказательство ведется методом от противного. Сделаем обратное предположение: существует $\delta_0>0$ такое, что какое бы ε ни взять, найдется такой вектор $y_\varepsilon\left(0\right)=y_{0\varepsilon}$, что $y_{0\varepsilon}\in Y_0\left(u+\varepsilon\Delta u\right)$, но $y_{0\varepsilon}\,\overline{\in}\,O_{\delta_0}\left(Y_0\left(u\right)\right)$, т. е. $\|y_{0\varepsilon}-y_0\|\geqslant\delta_0$ для любого $y_0\in Y_0\left(u\right)$, где $Y_0\left(u\right)$ определяется выражением (10).

Рассмотрим последовательность векторов $\{y_{0\varepsilon_i}\}$, соответствующую подпоследовательности положительных чисел $\{\varepsilon_i\to 0\}$. Так как любое ограниченное замкнутое конечномерное множество обладает свойством компактности, то из последовательности $\{y_{0\varepsilon_i}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{y_{0\varepsilon_j}\}$, сходящуюся к некоторому $\hat{y}_0$. По предположению $y_{0\varepsilon_j}\in Y_0\left(u+\varepsilon_j\Delta u\right)$. Это значит, что

$$\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u+\varepsilon_j\Delta u\right),y_{0\varepsilon_j},u+\varepsilon_j\Delta u\right)\right)\geqslant$$
$$\geqslant\max_{y_0\in Y_0(u)}\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u+\varepsilon_j\Delta u\right),y_0,u+\varepsilon_j\Delta u\right)\right).$$

Переходя к пределу по j, устанавливаем справедливость неравенства

$$\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u\right),\hat{y}_0,u\right)\right)\geqslant\max_{y_0\in Y_0(u)}\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u\right),y_0,u\right)\right).$$

Но это значит, что $\hat{y}_0\in Y_0\left(u\right)$, а тогда из $y_{0\varepsilon_j}\to\hat{y}_0$ вытекает, что для больших номеров j будет $\|y_{0\varepsilon_j}-\hat{y}_0\|<\delta_0$. Поэтому можно записать неравенство $\min_{y_0\in Y_0(u)}\|y_{0\varepsilon_j}-y_0\|<\delta_0$. Оно противоречит исходному предположению, что и требовалось доказать.

Из общих свойств непрерывности следует следующая лемма [15].

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{y_0\in M_0}\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u+\varepsilon\Delta u\right),y_0,u+\varepsilon\Delta u\right)\right)=\max_{y_0\in M_0}\Phi\left(y\left(N,x\left(x_0,u\right),y_0,u\right)\right), \tag{12}$$

где $u+\varepsilon\Delta u$ — допустимое управление; Δu — допустимая вариация допустимого управления u. Запись $y\left(N,x\left(x_0,u\right),y_0,u\right)$ подчеркивает, что y зависит от всей траектории программного движения $x\left(x_0,u\right)$.

Исследуем терминальную задачу управления с функционалом (5). В ней оценка качества пучка траекторий производится на конечном сечении $M_{N,u}$. Рассматриваются допустимые управления u и $\tilde{u}_\varepsilon$. В конечный момент $k=N$ они отображают множество M_0 соответственно в $M_{N,u}$ и $M_{N,\tilde{u}_\varepsilon}$.

Выпишем приращение функционала $I_2\left(u\right)$, полученное при вариации управления u на величину $\varepsilon\Delta u$, так что $\tilde{u}_\varepsilon=u+\varepsilon\Delta u,\ \varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}),\ \bar{\varepsilon}>0$:

$$\Delta I_2\left(u\right)=I_2\left(u+\varepsilon\Delta u\right)-I_2\left(u\right)=\max_{\tilde{y}(N)\in M_{N,\tilde{u}_\varepsilon}}\Phi\left(\tilde{y}\left(N\right)\right)-\max_{y(N)\in M_{N,u}}\Phi\left(y\left(N\right)\right). \tag{13}$$

В силу соответствия множеств $M_{N,u}$ и $M_{N,\tilde{u}_\varepsilon}$ множеству M_0 запишем, что $y\left(N\right)=y_N=y\left(N,x\left(x_0,u\right),y_0,u\right)$, $\tilde{y}\left(N\right)=\tilde{y}_N=\tilde{y}\left(N,x\left(x_0,u+\varepsilon\Delta u\right),y_0,u+\varepsilon\Delta u\right)$, где x_0 — некоторое заданное значение из Ω_x и $y_0\in M_0$.

Приращение $\Delta x\left(k\right)$ и $\Delta y\left(k\right)$ при управлении $\tilde{u}_\varepsilon=u+\varepsilon\Delta u$ можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} \Delta x\,(k+1) &= \varepsilon\delta x\,(k+1) + o\,(\varepsilon)\,, \\ \Delta y\,(k+1) &= \varepsilon\delta y\,(k+1) + o\,(\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{14}$$

где $k = 1, 2, \ldots, N-1$ и вариации δx и δy удовлетворяют уравнениям (6), (7). Для упрощения записи там, где это не вызовет недоразумений, будем использовать один и тот же символ $o\,(\varepsilon)$ для обозначения различных величин более высокого порядка малости, чем ε. При этом отметим, что здесь и далее $o\,(\varepsilon)$ есть величина более высокого порядка малости, чем ε, равномерно по y_0.

Приращение (13) функционала (5) перепишем следующим образом:

$$\Delta I_2\,(u) = \max_{y_0 \in M_0} \Phi\,(\tilde{y}\,(N, x\,(x_0, \tilde{u}_\varepsilon), y_0, u + \varepsilon\Delta u)) - \max_{y_0 \in M_0} \Phi\,(y\,(N, x\,(x_0, u), y_0, u))$$

или с учетом ранее введенного множества максимума — так:

$$\Delta I_2\,(u) = \Phi\,(\tilde{y}\,(N, x\,(x_0, \tilde{u}_\varepsilon), \tilde{y}_0, u + \varepsilon\Delta u)) - \Phi\,(y\,(N, x\,(x_0, u), y_0, u))\,.$$

Здесь $\tilde{y}_0 \in Y_0\,(u + \varepsilon\Delta u), y_0 \in Y_0\,(u)$. В силу (14) имеем равенство

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}\,(N) = y\,(N, x\,(x_0, u_\varepsilon), y_0, u) + \varepsilon\delta y\,(N, x\,(x_0, u), y_0, u) + o\,(\varepsilon)\,.$$

В силу непрерывной дифференцируемости $\Phi\,(y)$ по y можно записать, что

$$\Phi\,(\tilde{y}_N) = \Phi\,(y_N + \varepsilon\delta y_N + o\,(\varepsilon)) = \Phi\,(y_N) + \varepsilon\frac{\partial\Phi\,(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N + o\,(\varepsilon)\,,$$

где $\delta y_N = \delta y\,(N, x\,(x_0, u), y_0, u)$. Тогда имеем выражение

$$I_2\,(\tilde{u}_\varepsilon) = \max_{y_0 \in Y_0(u+\varepsilon\Delta u)} \left[\Phi\,(y_N) + \varepsilon\frac{\partial\Phi\,(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N + o\,(\varepsilon)\right]. \tag{15}$$

Для преобразования (15) воспользуемся известным неравенством

$$\max_{y \in G}\,[f_1\,(y) + f_2\,(y)] \leqslant \max_{y \in G} f_1\,(y) + \max_{y \in G} f_2\,(y)\,.$$

Следуя лемме 1, с одной стороны, можно утверждать, что множество максимумов $Y_0\,(u + \varepsilon\Delta u)$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon\,(\delta)$, лежит в δ-окрестности $Y_0\,(u)$ в соответствии с (11), а по лемме 2 в пределе при $\varepsilon \to 0$ сами максимумы совпадают (см. (12)). Можно получить следующее выражение:

$$I_2\,(\tilde{u}_\varepsilon) \leqslant \max_{y_0 \in Y_0(u)} \Phi\,(y_N) + \varepsilon \max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{\frac{\partial\Phi\,(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N\right\} + o\,(\varepsilon)\,.$$

Первый член в правой части этого неравенства тождественно равен $I\,(u)$. Следовательно,

$$I_2\,(\tilde{u}_\varepsilon) - I_2\,(u) \leqslant \varepsilon \max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{\frac{\partial\Phi\,(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N\right\} + o\,(\varepsilon)\,. \tag{16}$$

С другой стороны [15], имеем, что

$$\max_{y\in G}\left[f_1(y)+f_2(y)\right]\geqslant \max_{y\in G} f_1(y)+\max_{y\in Q} f_2(y), \tag{17}$$

где $Q=\{y\in G|f_1(x)=\max_{z\in G} f_1(z)\}$.

Если в качестве G рассмотреть множество M_0, то Q — множество точек максимума — в данном случае есть $Y_0(u)$. Тогда для (15) с учетом (17) получаем обратное неравенство

$$I_2(\tilde{u}_\varepsilon)\geqslant I_2(u)+\varepsilon\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N\right\}+o(\varepsilon).$$

Из него с учетом неравенства (16) следует вид приращения функционала

$$I_2(\tilde{u}_\varepsilon)-I_2(u)=\varepsilon\delta I_2+o(\varepsilon),$$

в котором

$$\delta I_2=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N\right\}. \tag{18}$$

5. Исследование функционала $I(u)$**.** Рассмотрим приращение функционала $I(u)$ при допустимом управлении $\tilde{u}_\varepsilon=u+\varepsilon\Delta u$, используя вариации (9) и (18):

$$I(\tilde{u}_\varepsilon)-I(u)=\varepsilon\delta I+o(\varepsilon),$$

здесь

$$\delta I_2=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial g_k}{\partial x_k}\delta x_k+\frac{\partial g_N}{\partial x_N}\delta x_N\right\}. \tag{19}$$

Оптимальное по функционалу (3) управление обозначим u^0. Оптимальность u^0 означает выполнение условия $\Delta I\left(u^0\right)=I(\tilde{u})-I\left(u^0\right)\geqslant 0$, где $\tilde{u}$ — любое другое допустимое управление. В частности, при $\tilde{u}=\tilde{u}_\varepsilon=u+\varepsilon\Delta u$ выполняется неравенство $I\left(u^0+\varepsilon\Delta u\right)-I\left(u^0\right)\geqslant 0$ или условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I\left(u^0+\varepsilon\Delta u\right)-I\left(u^0\right)}{\varepsilon}\geqslant 0.$$

Последнее условие оптимальности запишем следующим образом:

$$\max_{y_0\in Y_0(u)}\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial g_k}{\partial x_k}\delta x_k+\frac{\partial g_N}{\partial x_N}\delta x_N\geqslant 0. \tag{20}$$

Рассмотрим специальную игольчатую вариацию вида $\Delta u(j)=0$ при всех $j\neq k$, так что

$$\Delta u(k)=\{0,\ldots,\Delta u(k),\,0,\ldots,0\}, \tag{21}$$

где $\Delta u(k)\in K(u(k))$; $K(u(k))$ — конус допустимых вариаций управляющего воздействия $u(k)$. Для множества управлений U конус допустимых вариаций определяется так:

$$K(u)=\{\Delta u|u+\varepsilon\Delta u\in U,\ 0<\varepsilon<\bar{\varepsilon},\ u\in U\}.$$

В пространстве состояний введем сопряженную систему

$$\xi^T(k)=\gamma^T(k+1)\frac{\partial F(k)}{\partial x(k)}+\xi^T(k+1)\frac{\partial f(k)}{\partial x(k)}+\frac{\partial g_k}{\partial x(k)}, \tag{22}$$

$$\gamma^T(k)=\gamma^T(k+1)\frac{\partial F(k)}{\partial x(k)}, \tag{23}$$

в которой $\xi(k)$ — вектор с компонентами $\xi_1(k),\xi_2(k),\dots,\xi_n(k)$, $\gamma(k)$ — вектор с компонентами $\gamma_1(k),\gamma_2(k),\dots,\gamma_m(k)$. Переменные $\xi(k),\gamma(k),k=N-1,N-2,\dots,1$, определяются заданием величин $\xi(N),\gamma(N)$ на последнем шаге. Для рассматриваемой задачи оптимизации положим, что

$$\xi^T(N)=\frac{\partial g_N}{\partial x_N},\ \ \gamma^T(N)=\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}, \tag{24}$$

здесь $\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}$ — градиент функции $\Phi(y(N))$, $\frac{\partial g_N}{\partial x_N}$ — градиент функции $g_N=g(N,x(N))$, $y(N)=y_N=y(N,x(x_0,u),y_0,u)$, $y_0\in Y_0(u)$.

Преобразуем вариацию (19), учитывая сопряженные уравнения (22)–(24), уравнения в вариациях (6), (7) и используя игольчатую вариацию (21). Совершаем цепочку преобразований в предположении, что вариация управления производилась на k-м шаге:

$$\delta I=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\frac{\partial\Phi(y_N)}{\partial y_N}\delta y_N+\sum_{s=1}^{N-1}\frac{\partial g_s}{\partial x_s}\delta x_s+\frac{\partial g_N}{\partial x_N}\delta x_N\right\}=$$

$$=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\gamma^T(N)\,\delta y_N+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial g_s}{\partial x_s}\delta x(s)+\xi^T(N)\,\delta x(N)\right\}=$$

$$=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\gamma^T(N)\left[\frac{\partial F(N-1)}{\partial x(N-1)}\delta x(N-1)+\frac{\partial F(N-1)}{\partial y(N-1)}\delta y(N-1)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{N-2}\frac{\partial g_s}{\partial x_s}\delta x(s)+\left[\xi^T(N)\frac{\partial f(N-1)}{\partial x(N-1)}+\frac{\partial g_{N-1}}{\partial x(N-1)}\right]\delta x(N-1)\right\}.$$

Продолжаем цепочку равенств, учитывая при этом начальные условия (8), а именно $\delta x(0)=0$ и $\delta y(0)=0$:

$$\delta I=\max_{y_0\in Y_0(u)}\left\{\sum_{s=1}^{N-2}\frac{\partial g_s}{\partial x_s}\delta x_s+\right.$$

$$+\left[\gamma^T(N)\frac{\partial F(N-1)}{\partial x(N-1)}+\xi^T(N)\frac{\partial f(N-1)}{\partial x(N-1)}+\frac{\partial g_{N-1}}{\partial x(N-1)}\right]\delta x(N-1)+$$

$$\left.+\gamma^T(N)\frac{\partial F(N-1)}{\partial x(N-1)}\delta y(N-1)\right\}=$$

$$= \max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{ \sum_{s=1}^{N-2} \frac{\partial g_s}{\partial x_s} \delta x_s + \xi^T(N-1)\,\delta x(N-1) + \gamma^T(N-1)\,\delta y(N-1) \right\} = \cdots =$$

$$= \max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{ \sum_{s=1}^{N-2} \frac{\partial g_s}{\partial x_s} \delta x_s + \xi^T(k+1)\,\delta x(k+1) + \gamma^T(k+1)\,\delta y(k+1) \right\} = \cdots =$$

$$= \max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{ \left[\xi^T(k+1) \frac{\partial f(k, x(k), u(k))}{\partial u(k)} + \gamma^T(k+1) \frac{\partial F(k, x(k), y(k), u(k))}{\partial u(k)} \right] \Delta u(k) \right\}. \tag{25}$$

Вариация (25) функционала (3) и условие (20) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы управление* $u^0 = \left\{u^0(0), u^0(1), \ldots, u^0(N-1)\right\}$ *было оптимальным по функционалу* (3), *необходимо, чтобы при всех допустимых вариациях управления* u^0 *выполнялось неравенство*

$$\min_{\Delta u(k) \in K(u^0(k))} \left(\max_{y_0 \in Y_0(u)} \left\{ \left[\xi^T(k+1) \frac{\partial f\left(k, x^0(k), u(k)\right)}{\partial u(k)} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \gamma^T(k+1) \frac{\partial F\left(k, x^0(k), y^0(k), u(k)\right)}{\partial u(k)} \right] \Delta u(k) \right\} \right) \geqslant 0, \tag{26}$$

где $x^0(k)$, $y^0(k)$ *находятся из системы* (1), (2) *с начальным условием* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0 \in Y_0(u)$, *а сопряженные переменные — из системы* (22), (23) *с граничными условиями* (24) *при оптимальном управлении* u^0.

Заметим, что сопряженное уравнение (22) зависит как от программного, так и от возмущенных движений. Таким образом, при построении методов оптимизации динамики программного и возмущенных движений с учетом введенной связки (3) функционалов (4) и (5) на основе вариации (25) или условия оптимальности (26) на оптимизацию программного движения будут оказывать влияние и возмущенные движения.

6. Заключение. На основе вариационного подхода была построена достаточно общая математическая модель оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах, которая может быть использована для решения разных задач оптимизации. Методы дискретной оптимизации динамических систем достаточно широко представлены в литературе, в частности в [1, 3, 4]. Однако для решения различных практических задач необходимо создание специальных моделей оптимизации, которые бы учитывали специфику изучаемых проблем. Особое значение данный подход имеет для разнообразных задач моделирования и оптимизации динамики заряженных частиц в различных ускоряющих и фокусирующих структурах, проблемах трансмутации ядерных отходов, ядерной медицине и обработке изображений, а также для других задач. Разработке таких моделей посвящены, например, работы [10, 11, 16–23]. В данной статье продолжается исследование в этом направлении и развивается идея совместной оптимизации программного и возмущенных движений. Предложен функционал достаточно общего вида, позволяющий оценивать динамические характеристики программного движения и наихудшие параметры пучка в конечный момент времени. Полученные аналитическое представление вариации функционала

(25) и условие оптимальности (26) позволяют строить разные эффективные направленные методы минимизации рассматриваемого функционала.

Литература

1. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 255 с.

2. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.

3. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.

4. *Kotina E. D., Ovsyannikov A. D.* On simultaneous optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems // Proceedings of 11th International IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2000). 2000. Vol. 1. P. 183–185.

5. *Kotina E. D.* Control discrete systems and their applications to beam dynamics optimization // Proceedings of International Conference Physics and Control (PhysCon 2003). 2003. Vol. 3. P. 997–1002. N 1237041.

6. *Kotina E. D.* Discrete optimization problem in beam dynamics // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2006. Vol. 558. Iss. 1. P. 292–294.

7. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Физматлит, 1977. 394 с.

8. *Bondarev B. I., Durkin A. P., Ovsyannikov A. D.* New mathematical optimization models for RFQ structures // Proceedings of 1999 Particle Accelerator Conference. New York, 1999. P. 2808–2810.

9. *Овсянников А. Д.* Управление пучком заряженных частиц с учетом их взаимодействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 82–92.

10. *Овсянников А. Д.* Математические модели оптимизации динамики пучков. СПб.: ВВМ, 2014. 181 с.

11. *Mizintseva M. A., Ovsyannikov D. A.* On the minimax problem of beam dynamics optimization // Proceedings of the 25th Russian Particle Accelerator Conference (RuPAC 2016). 2016. P. 360–362.

12. *Mizintseva M. A., Ovsyannikov D. A.* Minimax problem of simultaneous optimization of smooth and non-smooth functionals // Proceedings of 2017 Constructive non-smooth analysis and related topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov). IEEE. 2017. P. 1–4.

13. *Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Ovsyannikov A. D.* Joint optimization of smooth and non-smooth functionals on beams of trajectories // Proceedings of the International Conference Optimal Control and Differential Games (dedicated to the 110th anniversary of L. S. Pontryagin). 2018. P. 203–205.

14. *Овсянников Д. А., Мизинцева М. А., Балабанов М. Ю., Дуркин А. П., Едаменко Н. С., Котина Е. Д., Овсянников А. Д.* Оптимизация динамики пучков траекторий с использованием гладких и негладких функционалов. Ч. 1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 1. С. 73–84. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.107

15. *Демьянов В. Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 112 с.

16. *Котина Е. Д.* К теории определения поля перемещений на основе уравнения переноса в дискретном случае // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 3. С. 38–43.

17. *Котина Е. Д., Леонова Е. Б., Плоских В. А.* Обработка радионуклидных изображений с использованием дискретных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 544–554. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.410

18. *Golovkina A., Ovsyannikov D., Olaru S.* Performance optimization of radioactive waste transmutation in accelerator driven system // Cybernetics and Physics. 2018. Vol. 7. N 4. P. 210–215.

19. *Kluchevskaia Yu. D., Polozov S. M.* Beam dynamics simulation in a linear accelerator for Cern future circular collider // Cybernetics and Physics. 2020. Vol. 9. N 2. P. 98–102.

20. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty // Journal of Optimization Theory and Applications. 2011. Vol. 151. N 1. P. 11–32.

21. *Бортаковский А. С.* Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Изв. Рос. акад. наук. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 37–63.

22. *Bortakovskii A. S., Nemychenkov G. I.* Suboptimal control of bunches of trajectories of discrete

deterministic automaton time-invariant systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. Vol. 56. N 6. P. 914–929.

23. *Panteleev A. V., Pis'mennaya V. A.* Application of a memetic algorithm for the optimal control of bunches of trajectories of nonlinear deterministic systems with incomplete feedback // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. Vol. 57. N 1. P. 25–36.

Статья поступила в редакцию 18 октября 2020 г.
Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

Контактная информация:

Котина Елена Дмитриевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.kotina@spbu.ru

Овсянников Дмитрий Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Mathematical model of joint optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems

E. D. Kotina, D. A. Ovsyannikov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Mathematical model of joint optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 213–224. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.210 (In Russian)

A new mathematical model for the optimization of discrete systems is constructed in the article. The program motion and the ensemble (beam) of perturbed motions are investigated. In this case, the authors consider the joint optimization of smooth and non-smooth functionals defined on the program and perturbed motions. The variation of the functional and the necessary optimality conditions are provided. The developed mathematical technique allows solving non-standard control and optimization problems in various fields of science and technology.

Keywords: discrete systems, functional variation, smooth and non-smooth functionals, optimization, optimal control.

References

1. Propoy A. I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [*Elements of the theory of optimal discrete processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 255 p. (In Russian)

2. Ovsyannikov D. A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* [*Mathematical methods of beam control*]. Leningrad, Leningrad University Press, 1980, 228 p. (In Russian)

3. Ovsyannikov D. A. *Modelirovanie i optimizaciya dinamiki puchkov zaryazhennyh chastic* [*Modeling and optimization of charged particle beam dynamics*]. Leningrad, Leningrad University Press, 1990, 312 p. (In Russian)

4. Kotina E. D., Ovsyannikov A. D. On simultaneous optimization of programmed and perturbed motions in discrete systems. *Proceedings of 11th International IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2000)*, 2000, vol. 1, pp. 183–185.

5. Kotina E. D. Control discrete systems and their applications to beam dynamics optimization. *Proceedings of International Conference Physics and Control (PhysCon 2003)*, 2003, vol. 3, pp. 997–1002, no. 1237041.

6. Kotina E. D. Discrete optimization problem in beam dynamics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2006, vol. 558, iss. 1, pp. 292–294.

7. Kurzhanski A. B. *Upravlenie i nabludenie v usloviah neopredelennosti* [*Control in case of uncertainty*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977, 394 p. (In Russian)

8. Bondarev B. I., Durkin A. P., Ovsyannikov A. D. New mathematical optimization models for RFQ structures. *Proceedings of 1999 Particle Accelerator Conference*. New York, 1999, pp. 2808–2810.

9. Ovsyannikov A. D. Upravlenie puchkom zarjazhennih chastist s uchetom ih vzaimodeystvia [Control of charged particles beam with consideration of their interaction]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2009, iss. 2, pp. 82–92. (In Russian)

10. Ovsyannikov A. D. *Matematicheskie modeli optimizatsii dinamiki puchkov* [*Mathematical models of beam dynamics optimization*]. Saint Petersburg, VVM Publ., 2014, 181 p. (In Russian)

11. Mizintseva M., Ovsyannikov D. On the minimax problem of beam dynamics optimization. *Proceedings of the 25th Russian Particle Accelerator Conference (RuPAC 2016)*, 2016, pp. 360–362.

12. Mizintseva M., Ovsyannikov D. Minimax problem of simultaneous optimization of smooth and non-smooth functionals. *Proceedings of 2017 Constructive non-smooth analysis and related topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov)*, IEEE, 2017, pp. 1–4.

13. Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Ovsyannikov A. D. Joint optimization of smooth and non-smooth functionals on beams of trajectories. *Proceedings of the International Conference Optimal Control and Differential Games (dedicated to the 110th anniversary of L. S. Pontryagin)*, 2018, pp. 203–205.

14. Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Balabanov M. Yu., Durkin A. P., Edamenko N. S., Kotina E. D., Ovsyannikov A. D. Optimizatsiya dinamiki puchkov trayektoriy s ispol'zovaniyem gladkikh i negladkikh funktsionalov. Ch. 1 [Optimization of dynamics of trajectory bundles using smooth and non-smooth functionals. Pt 1]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 73–84.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.107 (In Russian)

15. Demyanov V. F. *Minimaks: differentsiruyemost' po napravleniyam* [*Minimax: directional differentiability*]. Leningrad, Leningrad University Press, 1974, 112 p. (In Russian)

16. Kotina E. D. K teorii opredeleniya polya peremeshchenij na osnove uravneniya perenosa v diskretnom sluchae [On the theory of determining displacement field on the base of transfer equation in discrete case]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2010, iss. 3, pp. 38–43. (In Russian)

17. Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A. Obrabotka radionuklidnykh izobrazheniy s ispol'zovaniyem diskretnykh sistem [Radionuclide images processing with the use of discrete systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 544–554. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.410 (In Russian)

18. Golovkina A., Ovsyannikov D., Olaru S. Performance optimization of radioactive waste transmutation in accelerator driven system. *Cybernetics and Physics*, 2018, vol. 7, no. 4, pp. 210–215.

19. Kluchevskaia Yu. D., Polozov S. M. Beam dynamics simulation in a linear accelerator for Cern future circular collider. *Cybernetics and Physics*, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 98–102.

20. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2011, vol. 151, no. 1, pp. 11–32.

21. Bortakovskii A. S. Teorema razdeleniya v zadachakh upravleniya puchkami trayektoriy determinirovannykh lineynykh pereklyuchayemykh system [Separation theorem in control problems of beam trajectories of deterministic linear switched systems]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [*Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems*], 2020, no. 2, pp. 37–63. (In Russian)

22. Bortakovskii A. S., Nemychenkov G. I. Suboptimal control of bunches of trajectories of discrete deterministic automaton time-invariant systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 6, pp. 914–929.

23. Panteleev A. V., Pis'mennaya V. A. Application of a memetic algorithm for the optimal control of bunches of trajectories of nonlinear deterministic systems with incomplete feedback. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 1, pp. 25–36.

Received: October 18, 2020.
Accepted: April 05, 2021.

A u t h o r s' i n f o r m a t i o n:

Elena D. Kotina — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; e.kotina@spbu.ru

Dmitri A. Ovsyannikov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; d.a.ovsyannikov@spbu.ru