ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ 1

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

ВЫПУСК 4

ОКТЯБРЬ

2008

Научно-теоретический журнал
Издается с августа 1946 года

СОДЕРЖАНИЕ

К 70-летию В. Г. Мазьи

Математика

Механика

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Астрономия

Адрес редколлегии: 198504, Петродворец, Университетский пр., 28

Проект реализован при финансовой поддержке Правительства Санкт-Петербурга

Редактор *Т. В. Семенова*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*
Номер подготовлен в LaTeX 2_ε

Подписано в печать 27.10.2008. Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,33. Тираж 500 экз. Заказ №

Адрес редакции: 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.
Телефоны: 328-44-22, 328-21-64. e-mail: ts@ts2340.spb.edu

Типография Издательства СПбГУ. 199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519

Демьянович Ю. К. **Всплесковое разложение для функций на дифференцируемом многообразии** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 7–15.

Ранее изучались вэйвлеты для случая нерегулярной сетки. Всплесковые (вэйвлетные) разложения для неравномерной сетки хорошо известны. Обработка числовых потоков, связанных с дифференцируемым многообразием, возможна с помощью локальных функций, но создание эффективных алгоритмов требует привлечения аппарата вэйвлетов. Цель данной работы состоит в том, чтобы представить схему вэйвлетных разложений с использованием аппроксимационных соотношений. Здесь рассматриваются достаточные условия вложенности пространств локальных функций на дифференцируемом многообразии, строятся вэйвлетные разложения и формулы декомпозиции/реконструкции, даются оценки числа арифметических операций и оценки величины вэйвлетных компонент. Классические подходы связаны с использованием преобразования Фурье или с применением лифтинговой схемы. В предлагаемой работе исходными являются аппроксимационные соотношения; упомянутые соотношения ведут к вэйвлетным разложениям, которые имеют асимптотически оптимальный порядок аппроксимации (по N-поперечнику стандартных компактов); во многих случаях координатные вэйвлеты оказываются координатными сплайнами, а их среднее значение (в противоположность классическим случаям) может быть ненулевым. Заметим также, что порядок малости вэйвлетной компоненты равен порядку аппроксимации, а коэффициент линейной зависимости сложности вычислений от входных данных просто оценивается с помощью порядка аппроксимации.

Ключевые слова: всплески, вэйвлеты, сплайны, аппроксимационные соотношения, формулы декомпозиции, формулы реконструкции.

Библиогр. 12 назв.

УДК 517.9

Назаров А. И., Петрова А. Н. **О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 16–20.

Найдены точные константы в теоремах вложения $\overset{o}{W}{}_2^k(-1,1) \hookrightarrow \overset{o}{W}{}_2^{k-1}(-1,1)$. Кроме того, показано, что экстремальные функции являются четными при всех $k \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: точные константы, теоремы вложения Соболева, симметрия.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.946:539.3

Назаров С. А. **Базисы сингулярных решений в задачах механики трещин** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 21–34.

На основе общей теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно-гладкими границами исследуются важные в приложениях задачи механики трещин. Последовательно вводятся базисы сингулярных степенных решений вблизи вершины трещины (угла раствором 2π) и изучаются их свойства. Два таких базиса соотнесены с силовыми и деформационными критериями разрушения и найдены явные формулы, позволяющие переводить один базис в другой, а также пересчитывать классические коэффициенты интенсивности напряжений во введенные коэффициенты интенсивности деформаций. При этом для изотропных сред эти базисы, а следовательно, и соответствующие коэффициенты совпадают, но они различаются в случае произвольной анизотропии, причем при переходе от изотропии к анизотропии именно деформационный базис наследует свойства, играющие центральную роль в механике разруше-

ния. Деформационный базис также тесно связан с поверхностной энтальпией — функционалом Гиббса, управляющим искривлением и изломом трещин в процессе их квазистатического развития. Кроме того, понятие поверхностной энтальпии предоставляет естественный путь для проверки основных свойств базисов сингулярных решений. Помимо раскрытых трещин в однородных телах рассмотрены трещины с контактирующими берегами и трещины на границе раздела сред. Установлено, что в случае вещественного показателя сингулярности напряжений базисы сохраняют свойства базисов для однородной среды. Опять-таки, при помощи понятия поверхностной энтальпии опровергнута одна правдоподобная гипотеза о критерии вещественности показателя сингулярности.

Ключевые слова: трещина, угловая точка, базисы сингулярных решений, поверхностная энтальпия, области с кусочно гладкими границами

Библиогр. 30 назв.

УДК 517.547

Никотин В. М. **Экстремумы характеристических функций оператора Штурма—Лиувилля** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 35–38.

Изучается обратная задача для оператора Штурма—Лиувилля с симметричным потенциалом на отрезке. Хорошо известно, что обратные спектральные задачи для одномерных дифференциальных операторов типа Шредингера тесно связаны с изучением тех или иных специальных классов целых или мероморфных функций. В работе приводится результат автора о характеризации классов функций, порождённых конформными отображениями на гребёнку, аналогичный результату Марченко—Островского. В задаче Штурма—Лиувилля на отрезке с симметричным потенциалом естественными спектральными параметрами являются собственные числа (особенности мероморфной функции Вейля—Титчмарша). Однако «хорошие» двусторонние оценки потенциала через собственные числа на данный момент неизвестны. В связи с этим вполне естественно выглядит вопрос о возможной параметризации и детальном изучении класса характеристических функций. В настоящей работе полностью решается вопрос об асимптотическом поведении величин экстремумов этих функций на вещественной оси.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, конформное отображение на гребенку, задача Штурма—Лиувилля, целые функции с вещественными нулями

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.5

Сильванович О. В., Широков Н. А. **Гладкость функции и скорость приближения** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 39–45.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^+$ — множество, состоящее из конечного числа отрезков и луча $[a, \infty)$, $\omega(x)$ — возрастающая непрерывная функция типа модуля непрерывности на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(x + y) \leqslant \omega(x) + \omega(y), \quad \omega(x) \geqslant cx, \quad x > 0, \quad c > 0,$$

и

$$\int_0^y \frac{\omega(x)}{x} dx + y \int_y^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx \leqslant c_0 \omega(y), \quad y > 0,$$

где c_0 не зависит от y; $H^r_\omega(E)$ — пространство комплекснозначных функций f на множестве E, удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leqslant c_f \omega(|x - y|), \quad x, y \in E,$$

с нормой

$$\|f\|_{r,\omega} = |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{r} |f^{(\nu)}(0)| + \sup_{x,y \in E\ x \neq y} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Обозначим через $C_\sigma^{(r,\omega)}, \sigma > 0$, класс целых функций F_σ порядка $1/2$ и меняющегося типа $\sigma > 0$ с нормой, задаваемой равенством

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+} \frac{|F_\sigma(z)| \cdot e^{-\sigma|Im\sqrt{z}|}}{1+|z|^r\omega(|z|)+\sigma^{-2r}\omega(\sigma^{-2})}.$$

В данной работе доказывается обратная теорема приближения на введённом множестве E, которая согласуется с приведённой ранее прямой теоремой. А именно, речь идёт о том, что если функция $f \in C(E)$ может быть приближена в определённой шкале при помощи некоторого запаса приближающих функций $F_\sigma \in C_\sigma^{(r,\omega)}$с данной скоростью, то она имеет вполне определённую гладкость, то есть $f \in H_\omega^r(E)$ и $\|f\|_{r,\omega} \leqslant c$. Так как из прямой теоремы известно и о возможности приближения функций обсуждаемой гладкости с требуемой скоростью, получается конструктивное описание класса гладкости через скорость приближения.

При доказательстве используется подход, впервые применённый Е. М. Дынькиным в обратных теоремах. Для этого функцию f с множества E необходимо продолжить на всю комплексную плоскость, рассмотрев ряд дополнительных множеств и функцию

$$b_1(z) = \frac{1}{\pi\delta^2(z)} \int\limits_{K(z)} b_0(\zeta)dm_2(\zeta),$$

где $\delta(z) = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(z,E)$, $K(z) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta(z)\}$, $z \in \mathbb{C}\setminus E$, m_2 — плоская мера Лебега,

$$b_0(z) = \begin{cases} F_{2^n}(z)(z+1)^{-r-1}, & z \in G_n \setminus K, \\ 0, \quad z \in K. \end{cases}$$

Тогда функция f представляется в виде

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial b_1(z)}{\partial \overline{z}} \frac{(x+1)^{r+1}}{z-x} dm_2(z),$$

что и даёт возможность провести соответствующие оценки.

Ключевые слова: обратная теорема, скорость приближения, гладкость функций.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.968.23

Соловьев А. А. **L_p-ограниченность граничного интегрального оператора на контуре с пиком** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 46–58.

Данная работа является развитием результатов о разрешимости граничных интегральных уравнений на плоском контуре с пиком, полученных совместно с В. Г. Мазьей. Ранее было доказано, что на контуре Γ с внешним пиком оператор граничного уравнения краевой задачи Дирихле действует непрерывно из пространства $\mathcal{L}_{p,\beta+1}(\Gamma)$ на $\mathfrak{N}^-_{p,\beta}(\Gamma)$. Норма функции в $\mathcal{L}_{p,\beta}(\Gamma)$ определяется как

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}^1_{p,\beta}(\Gamma)} = \Big(\int_\Gamma \Big|(\partial/\partial s)\varphi(q)\Big|^p |q|^{p\beta} ds_q + \int_\Gamma |\varphi(q)|^p |q|^{p(\beta-1)} ds_q\Big)^{1/p},$$

если точкой заострения является начало координат. В этом случае нормы в пространствах $\mathfrak{N}^\mp_{p,\beta}(\Gamma)$ задаются соотношениями

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{N}^\mp_{p,\beta}(\Gamma)} = \Big[\int_{\Gamma\cup\{|q|<\delta\}} |\varphi(q_+) \mp \varphi(q_-)|^p |q|^{p(\beta-\mu)} ds_q + \|\varphi\|^p_{\mathcal{L}_{p,\beta+1}}\Big]^{1/p},$$

где $q_\pm$ — точки пересечения кривой Γ с окружностью $\{z : |z| = |q|\}$ и $\delta > 0$ — малое фиксированное число.

На контуре с внутренним пиком оператор граничного уравнения задачи Дирихле непрерывно отображает $\mathcal{L}_{p,\beta+1}(\Gamma)$ на $\mathfrak{M}_{p,\beta}(\Gamma)\big)$, где $\mathfrak{M}_{p,\beta}(\Gamma)$ является прямой суммой $\mathfrak{N}^{+}_{p,\beta}(\Gamma)$ и пространства $\mathfrak{P}(\Gamma)$ функций на Γ вида $p(z) = \sum_{k=0}^{m} t^{(k)} \mathrm{Re}\, z^k$ с параметром $m = [\mu - \beta - p^{-1}]$. В этой работе рассматривается оператор $I - 2W$ граничного интегрального уравнения плоской теории упругости, где W — упругий потенциал двойного слоя. Основным результатом является утверждение, что оператор $I - 2W$ непрерывно действует из пространства $\mathcal{L}_{p,\beta+1} \times \mathcal{L}_{p,\beta+1}(\Gamma)$ в постранство $\mathfrak{N}^{-}_{p,\beta} \times \mathfrak{N}^{-}_{p,\beta}(\Gamma)$.

На контуре с внутренним пиком из найденного представления оператора $I - 2W$ и теоремы об ограниченности вспомогательных интегральных операторов следует, что образы векторнозначных функций из $\mathcal{L}_{p,\beta+1} \times \mathcal{L}_{p,\beta+1}(\Gamma)$ имеют компоненты, представимые в виде суммы функций из пространств $\mathfrak{N}^{-}_{p,\beta}(\Gamma)$ и $\mathfrak{M}_{p,\beta}(\Gamma)$.

Ключевые слова: граничное интегральное уравнение, интегральный оператор, упругий потенциал.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.6

Борзых А. Н. **Об одном оптимизационном алгоритме, вычисляющем наибольшее сингулярное число вещественной матрицы** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 59–70.

Рассматривается задача вычисления наибольшего сингулярного числа заданной вещественной матрицы. Дается краткий обзор известных методов решения. Предлагается новый алгоритм оптимизационного типа, вычисляющий наибольшее сингулярное число. Дается обоснование предложенного алгоритма, представляется доказательство линейности скорости сходимости. Устанавливается связь между строковыми суммами матрицы и одним из ее сингулярных чисел, выводятся новые теоремы локализации. Показывается связь между предложенным алгоритмом и методом релаксации отношения Релея. Описываются некоторые исключительные ситуации, при которых предложенный алгоритм сходится к немаксимальному сингулярному числу. Предлагается вычислительный прием, позволяющий с достаточно большой гарантией избежать таких ситуаций.

Ключевые слова: сингулярные числа, норма матрицы, старшее сингулярное число, максимальное сингулярное число, проблема сингулярных чисел.

Библиогр. 5 назв.

УДК 513.6

Вавилов Н. А., Казакевич В. Г. **Еще одна вариация на тему разложения трансвекций** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 71–74.

Метод разложения унипотентов состоит в представлении элементарных матриц в виде произведения множителей, лежащих в собственных параболических подгурппах, образы которых под действием эндоморфизмов (например, сопряжений) также попадают в собственные параболические подгруппы. Для полной линейной группы этот метод был предложен в 1987 году Степановым для упрощения доказательства теоремы нормальности Суслина. Вскоре после этого Вавилов и Плоткин перенесли его на другие классические группы и группы Шевалле. С тех пор появилось много дальнейших результатов в таком духе. В настоящей работе предлагается еще одна вариация на эту тему. А именно, пусть R — коммутативное кольцо с 1, $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $n \geq 4$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ порождается трансвекциями $e + uv$, $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, $vu = 0$, такими, что v, gu и vg^{-1} имеют хотя бы по одной нулевой компоненте. Этот результат возник в связи с упрощенным доказательством теорем Уотерхауза, Голубчика, Михалева, Зельманова и Петечука о стандартности автоморфизмов полной линейной группы, основанным на использовании унипотентных элементов.

Ключевые слова: полная линейная группа, разложение унипотентов, параболические подгруппы, стандартность автоморфизмов.

Библиогр. 11 назв.

УДК 519.245

Ермаков С. М., Рукавишникова А. И., Тимофеев К. А. **О некоторых стохастических и квазистохастических методах решения уравнений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 75–83.

В этой статье авторы ссылаются на модификацию метода квази Монте-Карло (КМК), предложенную в их предыдущих работах. Эта модификация может с успехом применяться для решения интегральных уравнений второго рода, так как обладает рядом преимуществ по сравнению с методом КМК. Так, при решении этих уравнений методом КМК, оценивается сумма ряда, членами которого являются интегралы, конструктивная размерность которых бесконечно возрастает. Известно, однако, что это является одной из наиболее распространенных причин, затрудняющих использование метода КМК. Другая сложность заключается в условии мажорирующей сходимости, выполнение которого гарантирует абсолютную сходимость ряда, сумма которого оценивается.

Упомянутая модификация позволяет разрешить первую проблему и ослабить условие мажорирующей сходимости.

В этой статье авторы предлагают два семейства оценок, которые могут применяться в модифицированном алгоритме метода КМК. Рассматривалось интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int k(x,y)\varphi(y)\mu(dy) + f(x) \pmod{\mu},$$

где $x \in D \subset \mathbb{R}^s$, f и k — заданные функции, определенные на носителях мер μ и $\mu \otimes \mu$. Пошагово оцениваем $\varphi_n(x) = \int k(x,y)\varphi_{n-1}(y)\mu(dy) + f(x)$. Первая группа оценок служит для нахождения значения φ_n в фиксированной точке x':

$$\xi_1(x') = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_1^n(y_j), \text{ где } \xi_1^n(y) = \frac{k(x',y)\widehat{\varphi}_{n-1}(y)}{p_{n-1}(y)} + f(x'),$$

y_j распределены с плотностью p_{n-1}, $\widehat{\varphi}_{n-1}(y)$ — оценка, полученная на предыдущем шаге. Другая группа оценок позволяет оценивать φ_n в случайных точках.

В статье приводятся оптимальные параметры предлагаемых оценок и доказываются соответствующие теоремы.

Авторы проверили свою теорию на примере разностного аналога уравнения Навье—Стокса и в статье приводят результаты исследований.

Ключевые слова: интегральные уравнения второго рода, метод квази Монте-Карло, сходимость ряда, мажорирующая сходимость.

Библиогр. 7 назв. Ил. 3. Табл. 1.

УДК 518:517.432.1

Кабардов М. М. **О суммировании ряда Лагерра методом Эйлера—Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 84–89.

Рассмотрен метод обращения преобразования Лапласа, основанный на разложении оригинала в ряд по многочленам Лагерра

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(bt)\,.$$

Изображение ряда Лагерра дробно-линейным отображением приводится к степенному ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, который суммируется известным методом Эйлера—Кноппа. Параметр суммирования выбирается в комплексной плоскости таким образом, чтобы новое разложение оригинала

$$f(t) = \exp\left(\frac{bp\,t}{p-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(p)}{(1-p)^{k+1}}\, L_k\left(\frac{bt}{1-p}\right),$$

соответствующее преобразованию Эйлера—Кноппа, сходилось с максимальной скоростью. При этом на основании геометрических представлений обсуждается влияние требования регулярности преобразования Эйлера—Кноппа на выбор параметра суммирования. Проведены численные эксперименты, которые показали высокую эффективность предложенного метода выбора комплексного параметра.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обращение преобразования Лапласа, ряд Лагерра, ускорение сходимости, метод Эйлера—Кноппа.

Библиогр. 11 назв. Ил. 2. Табл. 1.

УДК 517.9

Тихомиров С. Б. **Внутренности множеств векторных полей со свойствами отслеживания, соответствующими некоторым классам репараметризаций** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 90–97.

Изучается структура $\mathbf{C}^1$-внутренности множеств векторных полей, обладающих различными видами свойства отслеживания. Основное отличие данной задачи от аналогичной задачи для дискретных динамических систем, порожденных диффеоморфизмами, состоит в репараметризации отслеживающих траекторий. В зависимости от типа репараметризации мы различаем липшицево и ориентированное свойства отслеживания. Известно, что структурно устойчивые векторные поля обладают липшицевым свойством отслеживания. Пусть X — векторное поле, p, q — его точки покоя или замкнутые траектории. Предположим, что существует точка нетрансверсального пересечения устойчивого многообразия p и неустойчивого многообразия q. Показано, что в этом случае векторное поле X не обладает липшицевым свойством отслеживания. Если одна из траекторий p или q является замкнутой, то X не обладает ориентированным свойством отслеживания. Из этих утверждений следует, что $\mathbf{C}^1$-внутренность множества векторных полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых векторных полей. В случае, если размерность многообразия не превышает 3, аналогичный результат верен для ориентированного свойства отслеживания.

Ключевые слова: динамическая система, псевдотраектория, свойство отслеживания, структурная устойчивость, векторные поля, гиперболичность.

Библиогр. 9 назв.

УДК 539.3

Бауэр С. М., Типясев А. С. **О математической модели оценки внутриглазного давления по методу Маклакова** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 98–101.

Тонометр Маклакова оценивает внутриглазное давление по диаметру зоны контакта роговицы и груза с плоским основанием (обычно 5 или 10 гр). Первые математические модели этого метода измерения ВГД были основаны на приближении, в котором глаз моделировался как сферическая оболочка, заполненная жидкостью и обладающая свойствами роговицы. В клиниках имеются таблицы, определяющие внутриглазное давление по зоне контакта соответствующего груза. Известно, что получены эти таблицы на основе усредненных экспериментальных данных. Но параметры глаза у всех разные и меняются с возрастом. Ранее предлагалась модель, в которой принимались во внимание свойства склеры и роговицы, но обе эти оболочки рассматривались как сегменты сферических оболочек.

В данной работе предполагается, что и роговица, и склера могут иметь эллиптическую форму. Как и прежде, оболочка заполнена несжимаемой жидкостью, находящейся под давлением. Роговица подвергается большим деформациям, поэтому ее состояние описывается нелинейными уравнениями мягких (безмоментных) оболочек. Анализируется зависимость истинного внутриглазного давления (до нагружения) от формы роговицы и склеры.

Ключевые слова: оболочка глаза, внутриглазное давление, деформация.

Библиогр. 1 назв. Ил. 2.

УДК 532.591

Бестужева А. Н. **Задача о дифракции волн на конусе** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 102–109.

Задача о дифракции неустановившихся гравитационных волн в несжимаемой жидкости впервые была рассмотрена Л. А. Бойко, где огибаемым препятствием служила вертикальная полуплоскость, погруженная в бесконечно глубокую жидкость, а источником образования волн — мгновенно приложенный в некоторой точке свободной поверхности начальный импульс. Решение задачи получено путем разложения по функциям Бесселя. Л. Н. Сретенский получил решение задачи Коши—Пуассона при погруженной вертикально в бесконечно глубокую жидкость полуплоскости с помощью метода разветвленных решений, предложенного Зоммерфельдом для исследования дифракции световых волн. Б. И. Себекиным была решена задача Коши—Пуассона для двугранного угла произвольного раствора и для бассейна конечной глубины. Для решения этих задач были применены методы интегральных преобразований. Настоящая статья посвящена изучению дифракции волн на конусе.

Исследуются установившиеся волновые движения идеальной несжимаемой жидкости в области, ограниченной свободной поверхностью и бесконечным конусом с вершиной на свободной поверхности. Волновое движение вызывается плоской волной, бегущей из бесконечности. Задача ставится для потенциала скорости в рамках линейной дисперсионной теории и сводится к уравнению Лапласа с граничными условиями третьего рода на свободной поверхности и второго рода на поверхности конуса. При делении задачи по особенностям граничных условий с помощью интегральных преобразований решение первой задачи строится с помощью полиномов Лежандра, а во второй задаче приходим к функциональному уравнению. Точное (аналитическое) решение задачи пространственных волновых движениях в предельных случаях получено.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, установившиеся волновые движения, конус, дифракция, линейная дисперсионная теория, интегральные преобразования, полиномы Лежандра, функциональное уравнение.

Библиогр. 8 назв. Ил. 4.

УДК 531.001

Вовненко Н. В., Зимин Б. А., Судьенков Ю. В. **Особенности формирования динамических напряжений в тепло- и нетеплопроводящих материалах при субмикросекундных длительностях нагрева** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 110–117.

В работе представлены результаты экспериментальных исследований и теоретического анализа формы отклика, вызванного лазерным нагревом субмикросекундной длительности. Проведен анализ решения задач термоупругости. Решение дифференциального уравнения представлено в виде суммы двух типов волн деформаций. Одна является преимущественно напряжением сжатия, другая напряжением растяжения. Форма термомеханического отклика напряжений зависит от теплопроводности среды. Различие формы фазы растяжения как в теоретическом решении, так и в экспериментальных результатах является основным отличием термоупругого отклика теплопроводящих и нетеплопроводящих сред.

Ключевые слова: термоупругость, лазерный нагрев, теплопроводность.

Библиогр. 13 назв. Ил. 5.

УДК 539. 3

Даль Ю. М., Морщинина Д. А. **О напряженно-деформированном состоянии интраокулярной линзы (ИОЛ)** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 118–124.

В статье исследовано напряженно-деформированное состояние современных интраокулярных линз (ИОЛ), которые применяются при лечении катаракты. С точки зрения механики деформируемого тела, оптическую часть ИОЛ можно считать изотропным диском, а опорные элементы (гаптику) естественно рассматривать как тонкие криволинейные стержни, жестко закрепленные на контуре диска и абсолютно свободные на другом конце. В результате имплантации интраокулярной линзы в капсулу хрусталика опорные элементы оказываются изогнутыми, в местах их соединения с диском возникают реакции взаимодействия — сосредоточенные силы и моменты. В связи с этим оценка напряженно-деформированного состояния интраокулярной линзы состоит в определении напряжений в диске и вычислении прогибов опорных элементов. В первом случае методами теории функций комплексного переменного найдено точное аналитическое решение плоской задачи линейной теории упругости для диска, загруженного на контуре самоуравновешенными сосредоточенными силами и моментами. Проведено сравнение полученных результатов с аналогичными решениями для полуплоскости. Во втором — на основе нелинейной теории тонких криволинейных стержней выведены формулы для координат концевой точки стержня и напряжений, возникающих в концевых сечениях опорных элементов.

Ключевые слова: упругий круглый диск, самоуравновешенные сосредоточенные силы и моменты на контуре диска, напряженно-деформированное состояние.

Библиогр. 9 назв. Ил. 6.

УДК 539.374

Лашков В. А. **Взаимодействие твердых частиц газовзвеси с поверхностью сложного профиля** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 125–130.

В статье представлено исследованию коэффициентов восстановления скорости твердых частиц газовзвеси при их взаимодействии с поверхностью тела. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что шероховатость поверхности существенно влияет на параметры отскока частиц. Таким образом, сопротивление тела воздействию твердых частиц зависит от особенностей формы и шероховатости поверхности. Проведено экспериментальное исследование интегральных (средних по поверхности) коэффициентов восстановления скорости частиц. В экспериментах использовались модели, поверхность которых имела заданные особенности. Эксперименты показали, что особенности профиля поверхности значительно влияют на величину коэффициента восстановления скорости. Для таких поверхностей выполнены расчеты коэффициентов восстановления скорости частиц для таких поверхностей с использованием коэффициентов восстановления скорости, полученных для гладкой поверхности. Показано, что определение интегральных коэффициентов восстановления скорости частиц для такой поверхности требует учета многократности взаимодействия частицы с поверхностью. Рассмотрено влияние соотношения характерных размеров частицы и особенностей профиля на характер передачи импульса. Показано, что при малых углах наклона поверхности коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости может быть больше единицы, а коэффициент восстановления касательной составляющей скорости уменьшаться до нуля. При определении коэффициента восстановления скорости частиц необходимо принимать во внимание уровень шероховатости и особенности профиля поверхности.

Ключевые слова: двухфазный поток, твердые частицы, коэффициент восстановления скорости, шероховатость поверхности, соударение.

Библиогр. 7 назв. Ил. 4.

УДК 524.3/4–32

Башаков А. А. **Тестирование фазовых моделей звездных систем, построенных методом Шварцшильда** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 131–143.

В статье представлено описание хода работ по тестированию комплекса программ, предназначенных для построения фазовых моделей звездных систем методом Шварцшильда, а также комплекса сопутствующих подпрограмм, предназначенных для проверки устойчивости полученной модели.

Метод Шварцшильда позволяет строить фазовый модели без априорного знания интегралов движения. В методе сначала в заданном потенциале строится библиотека орбит, затем вычисляются веса орбит, так чтобы их суперпозиция наилучшим образом воспроизводила необходимые наблюдательные данные. Но метод Шварцшильда не дает гарантии устойчивости полученной фазовой модели, поэтому проводится дополнительное исследование модели на устойчивость. Для этого полученная фазовая модель заменяется набором N точек и изучается эволюция дискретной модели в рамках задачи N тел.

В статье представлено описание построения фазовой модели и ее проверки на устойчивость для потенциалов сферической модели Пламмера и модели Галактики Кутузова—Осипкова. Для них выполнен весь цикл алгоритмов: нахождение фазовой модели методом Шварцшильда, переход к дискретной модели, соответствующей найденной фазовой модели, и изучение дискретной модели как системы N материальных точек. Проведенные испытания разработанных алгоритмов и подпрограмм показали хорошее соответствие построенной модели с аналитическим решением для политропной модели Пламмера—Шустера и устойчивость дискретной модели для нее.

Ключевые слова: динамика звездных систем, фазовые модели галактик, численные методы.
Библиогр. 10 назв. Илл. 3.

CONTENTS

Dedicated 70-years of birthday V. G. Maz'ya

Mathematics

Mechanics

Astronomy