

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1
Выпуск 2

2010
Июнь

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. ИЗДАЕТСЯ С АВГУСТА 1946 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

К 80-ЛЕТИЮ КАФЕДРЫ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

<i>Буравцев А. И., Матвеев С. К., Нагнибеда Е. А.</i> 80 лет кафедре гидроаэромеханики	3
<i>Кустова Е. В., Нагнибеда Е. А.</i> Кинетическое описание течений неравновесной реагирующей смеси $\text{CO}_2/\text{O}_2/\text{CO}/\text{C}/\text{O}$ в пятитемпературном приближении ...	19
<i>Лашков В. А.</i> Коэффициент восстановления скорости при ударе под углом	31
<i>Мирошин Р. Н.</i> О некоторых решениях уравнения Колмогорова—Чепмена для марковских процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем	39
<i>Петров Д. А., Цибаров В. А.</i> Предельная модель влажного торнадо	45
<i>Рыдалевская М. А.</i> Иерархия времен релаксации и модельные кинетические уравнения	55

МАТЕМАТИКА

<i>Абрамовская Т. В., Петров Н. Н.</i> О некоторых задачах гарантированного поиска на графах	63
<i>Бегун Н. А.</i> О существовании решений, суммируемых с квадратом, для систем с малой нелинейностью	70



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ
1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

© Авторы статей
© Издательство
Санкт-Петербургского
университета, 2010

<i>Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р., Дороденков А. А.</i> Регулярные и сингулярные периодические возмущения осциллятора с кубической восстанавливающей силой	79
<i>Бугайченко Д. Ю., Соловьев И. П.</i> Разработка многокорневых разрешающих диаграмм для целочисленных функций	90
<i>Зубер И. Е., Гелиг А. Х.</i> Инвариантная стабилизация некоторого класса функционально-дифференциальных уравнений	98
<i>Решетов С. В.</i> Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума	106

МЕХАНИКА

<i>Пресняк В. А.</i> Влияние связи вращательной и колебательной энергии двухатомных молекул на их колебательные распределения	116
<i>Греков М. А.</i> Совместная деформация кругового включения и матрицы	125
<i>Лукин А. А., Морозов В. А.</i> Инициирование роста трещин при кратковременных импульсных нагружениях	134
<i>Платонов В. В.</i> Устойчивость трансверсально изотропной сферической оболочки под действием нормального давления	140

АСТРОНОМИЯ

<i>Шайдулин В. Ш.</i> Ряд Лапласа для потенциала шарового сектора	144
Рефераты	152
Abstracts	157
Contents	162

РЕФЕРАТЫ

УДК 533.6.011

Буравцев А. И., Матвеев С. К., Нагнибеда Е. А. **80 лет кафедре гидроаэромеханики** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 3–18.

Работа посвящена 80-летию кафедры гидроаэромеханики факультета математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета. Кратко излагаются основные этапы развития гидроаэромеханики в Санкт-Петербурге. Приведены краткие сведения о жизни и научной деятельности всех заведующих кафедрой. Дается обзор основных научных направлений и достижений кафедры на разных этапах ее существования. В настоящее время на кафедре ведутся научные исследования по следующим направлениям: физико-химическая газодинамика, динамика сложных сред, вычислительная гидрогазодинамика, сверхзвуковая газовая динамика, динамика вязкой жидкости, экспериментальная аэродинамика. Кафедра готовит специалистов в этих областях механики жидкости и газа. Статья содержит список работ, касающихся истории кафедры.

Ключевые слова: гидроаэромеханика, газовая динамика, история развития.

Библиогр. 15 назв. Ил. 8.

УДК 533.6.011

Кустова Е. В., Нагнибеда Е. А. **Кинетическое описание течений неравновесной реагирующей смеси $\text{CO}_2/\text{O}_2/\text{CO}/\text{C}/\text{O}$ в пятитемпературном приближении** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 19–30.

В работе замкнутое самосогласованное описание реагирующей смеси $\text{CO}_2/\text{O}_2/\text{CO}/\text{C}/\text{O}$ выводится на основе кинетической теории газов. Рассматривается сильно неравновесное возбуждение колебательных степеней свободы молекулярных компонентов, диссоциация, рекомбинация и обменные реакции. Учитывается сложная внутренняя структура молекул CO_2 и разные скорости переходов колебательной энергии. Замкнутая система уравнений для макропараметров потока выведена из кинетических уравнений для функций распределения. Система содержит уравнения сохранения массы, импульса и энергии и уравнения пятитемпературной химической и колебательной кинетики.

Выражения для вычисления потоковых и источниковых членов в этих уравнениях выведены на основе методов кинетической теории. Потоковые члены выражены через градиенты макроскопических параметров и коэффициенты переноса. В статье представлены формулы для коэффициентов диффузии, термодиффузии, сдвиговой и объемной вязкости, релаксационного давления, полного коэффициента теплопроводности и колебательных коэффициентов теплопроводности асимметричной и спаренной (симметричной деформационной) мод CO_2 и двухатомных компонент O_2, CO .

Источниковые члены определяются как с использованием строгих алгоритмов кинетической теории, включающих неравновесные заселенности колебательных уровней и зависящие от уровней коэффициенты скоростей энергетических переходов и реакций, так и используя приближенные выражения, содержащие время релаксации, измеряемое экспериментально.

Предложенная новая кинетическая модель, учитывающая важные свойства кинетики CO_2 и математические принципы кинетической теории, пригодная для практической реализации в вычислительной гидродинамике для расчетов высоко температурных потоков смесей, содержащих молекулы CO_2 .

Ключевые слова: неравновесные течения, углекислый газ, процессы переноса и релаксации.

Библиогр. 17 назв.

УДК 539.374

Лашков В. А. **Коэффициент восстановления скорости при ударе под углом** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 31–38.

При решении задач обтекания поверхности летательного аппарата потоком газа, в котором содержатся твердые частицы, необходимо описать граничные условия для твердой фазы. Как правило, частицы, присутствующие в воздухе, представляют собой мелкие обломки породы, которые обладают весьма высокой твердостью и имеют неправильную форму. Они взаимодействуют со стенками канала или тела под разными углами к поверхности в широком диапазоне скоростей (100–1000 м/с). Предложена методика расчета коэффициентов восстановления скорости при ударе твердой частицы газовой смеси под углом к поверхности. Проведена апробация методики с использованием известных экспериментальных данных. Сравнение результатов расчета коэффициентов восстановления с данными экспериментов показывают, что они находятся в удовлетворительном согласии. Анализ полученных

результатов показывает, что на величину коэффициентов восстановления скорости оказывает сильное влияние скорость вращения частицы.

Ключевые слова: коэффициент восстановления скорости, удар под углом, модель взаимодействия, эксперимент.

Библиогр. 17 назв. Ил. 5.

УДК 519.21

Мирошин Р. Н. **О некоторых решениях уравнения Колмогорова—Чепмена для марковских процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 39–44.

Указанное в заглавии уравнение — основное в теории марковских случайных процессов. В случае процессов с дискретным множеством состояний его решение есть вероятность перехода. Обычно это уравнение решается путем сведения к линейным уравнениям. В 1932 г. С. Н. Бернштейн поставил проблему прямого нахождения решения. В 1961 О. В. Сарманов нашел такие решения для стационарного марковского процесса с непрерывным пространством состояний в виде билинейных рядов. В 2007 г. автор получил несколько решений в виде обобщенных билинейных рядов без ограничений Сарманова. В настоящей статье наши результаты распространены на процессы с дискретным множеством состояний. Два решения уравнения Колмогорова—Чепмена получены посредством сведения к некоторому функциональному уравнению. Решения представляются в виде билинейной суммы и её обобщения, причем каждый член суммы пропорционален произведению двух ортогональных функций. Результаты проиллюстрированы на примерах процессов с двумя состояниями, на которых утверждения статьи легко проверяются. Ещё один пример демонстрирует, что есть решение уравнения Колмогорова—Чепмена, не имеющее вероятностного смысла.

Ключевые слова: марковский процесс с дискретным множеством состояний и непрерывным временем, вероятность перехода, решение уравнения Колмогорова—Чепмена, функциональное уравнение, обобщенная билинейная сумма.

Библиогр. 8 назв.

УДК 533.70:541:12:542.12

Петров Д. А., Цибаров В. А. **Предельная модель влажного торнадо** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 45–54.

Предложена предельная математическая модель динамики торнадо. Дано приближенное аналитическое решение этой модели. Во внимание принимаются локально равновесные процессы испарения и конденсации пара на каплях и частицах. Локально равновесные или очень медленные процессы агрегирования и распада взвешенных частиц также принимаются во внимание. Дана оценка порядков физических процессов в торнадо. Выписана расширенная система интегралов движения, вытекающая из свойств рассматриваемой предельной задачи для влажного торнадо. Учитывается полидисперсность включений. Несущая среда рассматривается как бинарная смесь сухого воздуха и пара. Выписан эффективный показатель политропической кривой торнадо. Свойства приближенного решения предельной математической модели торнадо и общие свойства реального торнадо согласуются. Например, радиус торнадо возрастает, а его тангенциальная и продольная скорости убывают с высотой от Земли, давление убывает с высотой и когда радиальная координатная компонента $r \rightarrow 0$. Линии тока — расширяющиеся винтовые линии.

Ключевые слова: торнадо, стохастический (кинетический) подход, политропический (политропный), политропа, агрегирование, коагуляция, испарение, конденсация, линия тока, расширяющаяся винтовая линия, предельная модель.

Библиогр. 16 назв.

УДК 533.6:536:517

Рыдалевская М. А. **Иерархия времен релаксации и модельные кинетические уравнения** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 55–62.

Рассмотрены газовые смеси с внутренними степенями свободы молекул и химическими реакциями. В таких смесях наряду с упругими столкновениями молекул необходимо учитывать неупругие, сопровождающиеся изменением различных видов их внутренней энергии или химического состава. Известно, что молекулярные столкновения разного типа происходят с различной частотой. Средние промежутки времени между такими столкновениями удовлетворяют некоторой системе неравенств. Следствием этого является иерархия времен релаксации и формирование в газовых потоках моле-

кулярных распределений, равновесных или слабо неравновесных по одним степеням свободы микрочастиц и сильно неравновесных по другим. Для описания таких потоков предложены модельные кинетические уравнения, аналогичные уравнению Крука. Доказана справедливость H -теоремы. Для разных приближений метода Чепмена—Энскога приведены замкнутые системы уравнений для определяющих макропараметров (экстенсивных и интенсивных). Обсуждаются преимущества перехода от экстенсивных к сопряженным интенсивным параметрам.

Ключевые слова: кинетическая теория газов, внутренние степени свободы, химические реакции, модельные кинетические уравнения, экстенсивные и интенсивные макропараметры.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517.977, 519.173

Абрамовская Т. В., Петров Н. Н. **О некоторых задачах гарантированного поиска на графах** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 63–69.

Рассматриваются дифференциальные игры преследования на графах при отсутствии информации об убегающем. Основное внимание уделяется задаче ε -поиска, поставленной П. А. Головачом, состоящей в следующем. В трёхмерном евклидовом пространстве рассматривается топологический граф, для простоты рёбра графа считаются конечнозвеньными ломаными. Предполагается, что преследователи и убегающий обладают простыми движениями, причём граф является для всех участников фазовым ограничением. Целью группы преследователей является построение программы, основанной только на структуре графа и обеспечивающей поимку «невидимого» убегающего, т. е. сближение с ним на расстояние (во внутренней метрике графа), не превосходящее заданного неотрицательного числа ε . Задача состоит в том, чтобы для каждого топологического графа найти наименьшее число преследователей (называемое ε -поисковым числом), необходимое для успешного завершения ε -поиска. Исследуются свойства функции Головача, ставящей в соответствие каждому неотрицательному ε ε -поисковое число. На примере полных графов с числом вершин более 5 П. А. Головачом и Н. Н. Петровым было показано, что скачки функции Головача могут быть неединичными. Авторам известны примеры подобных «вырождений» в классе деревьев. Эти примеры опровергают гипотезу о том, что функция Головача любого планарного графа имеет только единичные скачки. Выделен класс деревьев, для которых функция Головача имеет только единичные скачки.

Ключевые слова: гарантированный поиск, группа преследователей, убегающий, ε -поимка, поисковые числа, функция Головача, единичные скачки.

Библиогр. 6 назв. Ил. 1.

УДК 517.926.4

Бегун Н. А. **О существовании решений, суммируемых с квадратом, для систем с малой нелинейностью** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 70–78.

Рассматривается вопрос о структурной устойчивости систем при возмущении коэффициентов, малых по норме в $L^2(\mathbb{R})$. Приводятся условия, достаточные для того, чтобы для каждого решения возмущенной системы существовало решение исходной системы, близкое по норме $L^2(\mathbb{R})$ к решению возмущенной системы.

Ключевые слова: структурная устойчивость, гиперболическая система, линейная система, неоднородная система.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.925

Бибииков Ю. Н., Букаты В. Р., Дороденков А. А. **Регулярные и сингулярные периодические возмущения осциллятора с кубической восстанавливающей силой** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 79–89.

Рассматриваются малые регулярные и сингулярные периодические возмущения системы, консервативная часть которой представляет собой осциллятор с кубической восстанавливающей силой. Малость возмущений определяется как малостью рассматриваемой окрестности положения равновесия, так и наличием малого параметра.

При отсутствии малого параметра приведено условие устойчивости положения равновесия по Ляпунову. При наличии малого параметра как в случае регулярных, так и в случае сингулярных возмущений, выведено уравнение, положительным корням которого соответствуют инвариантные двумерные торы возмущенной системы.

Ключевые слова: устойчивость, инвариантные торы, сингулярные возмущения.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.683.8, 004.424

Бугайченко Д. Ю., Соловьев И. П. **Разработка многокорневых разрешающих диаграмм для целочисленных функций** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 90–97.

В работе предлагаются новые структуры данных для представления целочисленных функций и матриц: многокорневые бинарные разрешающие диаграммы (*MRBDD*), а также алгоритмы выполнения некоторых стандартных операций над целочисленными функциями и матрицами в таком представлении. За счет более эффективного повторного использования элементов структуры многокорневые бинарные разрешающие диаграммы оказываются более компактной формой представления по сравнению с широко распространенными многотерминальными бинарными разрешающими диаграммами (*MTBDD*). Приведенные в работе экспериментальные результаты показывают, что многокорневые бинарные разрешающие диаграммы являются перспективной заменой многотерминальных бинарных разрешающих диаграмм, в том числе и в таких задачах, как вероятностная верификация, манипуляция распределениями вероятности, анализ сетей Петри и других моделей вычислительных систем.

Ключевые слова: бинарные разрешающие диаграммы, многотерминальные разрешающие диаграммы, представление функций и матриц.

Библиогр. 10 назв. Ил. 1. Табл. 1.

УДК 517.929

Зубер И. Е., Гелиг А. Х. **Инвариантная стабилизация некоторого класса функционально-дифференциальных уравнений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 98–105.

Рассматривается система $\dot{x} = A(\cdot)x + b_1(\cdot)u_1 + b_2(\cdot)u_2 + g(\cdot)$, $x(0) = x_0$, где $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$. Элементы матриц $A(\cdot)$, $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ и $g(\cdot)$ являются функционалами произвольной природы, о которых известны лишь границы их изменений. Ставится задача определения таких управлений $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, чтобы при любых x_0 и $g(\cdot)$ выход системы $\sigma = (c, x)$ удовлетворял условию инвариантности $\dot{\sigma} + \varepsilon\sigma = 0$ ($\varepsilon > 0$) при ограниченности всех траекторий $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \varkappa \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|g(\cdot)\|$. Решение этой задачи основано на построении функции Ляпунова с постоянной якобиевой матрицей коэффициентов.

Ключевые слова: неопределенные системы, инвариантная стабилизация, функции Ляпунова.

Библиогр. 15 назв.

УДК 519.21

Решетов С. В. **Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 106–115.

В работе рассматривается задача оценивания псевдо-периодической функции, наблюдаемой на большом отрезке на фоне стационарного шума. Предполагается, что неизвестная наблюдаемая функция лежит в компактном подмножестве пространства псевдо-периодических функций со счетным спектральным множеством, элементы которого отделены от друг друга. Получены нижние и верхние границы для величины минимаксного риска, построена минимаксная оценка наблюдаемой функции.

Ключевые слова: минимаксный риск, псевдо-периодическая функция, стационарный процесс.

Библиогр. 13 назв.

УДК 539.3

Пресняк В. А. **Влияние связи вращательной и колебательной энергии двухатомных молекул на их колебательные распределения** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 116–124.

Сравниваются две модели вращательного движения молекулы, модель жесткого ротатора, в которой пренебрегается зависимостью вращательной энергии молекулы от колебательного уровня, на котором она находится и модель нежесткого ротатора, учитывающая связь колебательной и вращательной энергии молекулы. Показано заметное влияние связи колебаний и вращений на вращательную и полную статистические суммы и на равновесные вращательные и колебательные распределения в газах N_2 , HCl и H_2 . Получено обобщение неравновесного распределения Тринора в двухтемпературном газе учитывающие связь колебательной и вращательной энергии молекулы. Это распределение сравнивается с распределением Тринора в газе из жестких ротаторов для H_2 , N_2 и HCl .

Ключевые слова: Распределение Тринора, вращательная энергия, колебательная энергия, двухатомные молекулы, жесткий ротатор.

Библиогр. 8 назв. Ил. 11. Табл. 1.

УДК 517.958, 539.3

Греков М. А. **Совместная деформация кругового включения и матрицы** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 125–133.

Рассматривается упругая плоскость с круговым включением при заданных разрывах усилий и перемещений на межфазной границе и ненулевых условиях на бесконечности. В явном виде найдены выражения для комплексных потенциалов Гурса—Колосова этой задачи. Построенное решение может быть использовано при рассмотрении разнообразных дефектов круговой границы раздела, включая межфазные трещины и жесткие участки границы. Отмечается, что данная задача является основой в методе суперпозиции, используемом для решения многих задач, в которых круговая область является одним из элементов многокомпонентной упругой среды. В этом случае корректность постановки задачи, связанная с существующей зависимостью скачков усилий и перемещений друг от друга, вытекает из самого метода суперпозиции. Техника применения этого метода показана в статье на примере решения сингулярных задач о действии сосредоточенной силы и краевой дислокации внутри включения и в матрице. Приводятся результаты расчетов контактных напряжений при действии сосредоточенной силы внутри включения.

Ключевые слова: комплексный потенциал Гурса—Колосова, круговая граница раздела, метод суперпозиции, сингулярная задача.

Библиогр. 15 назв. Ил. 3.

УДК 539.3

Лукин А. А., Морозов В. А. **Иницирование роста трещин при кратковременных импульсных нагружениях** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 134–139.

Предложены два экспериментальных метода иницирования роста трещин в полиметилметакрилате (ПММА) и метод измерения скорости их движения при импульсном нагружении с помощью электрического взрыва проводников. Определено пороговое значение амплитуды разрушающей нагрузки в условиях динамического воздействия. Проведено численное решение выведенного ранее уравнения движения трещины при различных начальных её длинах. Оценено время выхода трещины на стационарную скорость. Сравнение экспериментальных и расчетных данных показало их близость.

Ключевые слова: иницирование роста трещины, распространение трещины, динамическое разрушение, импульсное нагружение, электрический взрыв проводников.

Библиогр. 4 назв. Ил. 7.

УДК 539.3

Платонов В. В. **Устойчивость трансверсально изотропной сферической оболочки под действием нормального давления** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 140–143.

Рассматривается устойчивость трансверсально изотропной сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного по поверхности нормального давления. Задача исследуется по уточненной теории С. А. Амбарцумяна и в классической постановке. Проводится сравнение величин критической нагрузки для случая трансверсально изотропного и изотропного материалов. Определяются условия, при которых теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, существенно уточняет классическую теорию.

Ключевые слова: трансверсально изотропная сферическая оболочка, уточненная теория, параметр поперечной жесткости на сдвиг, теория Амбарцумяна.

Библиогр. 4 назв. Табл. 1.

УДК 521.14

Шайдулин В. Ш. **Ряд Лапласа для потенциала шарового сектора** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 2. С. 144–151.

Выведено точное выражение гравитационного потенциала на оси симметрии сферического сектора при произвольном угле полураствора 2α . В предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ приходим к потенциалу неоднородного стержня с линейной плотностью, пропорциональной квадрату расстояния от вершины сектора. Для бесконечно-узкого сектора получены простые формулы для гармонических коэффициентов потенциала и их асимптотики при $n \rightarrow \infty$. В общем случае приведен алгоритм вычисления коэффициентов и получена их асимптотика при $n \rightarrow \infty$. Эти результаты будут применены к анализу существующих моделей геопотенциала, содержащих гармоники вплоть до значений n порядка 10^3 .

Ключевые слова: Гравитационный потенциал, ряд Лапласа, равномерная и среднеквадратическая норма, асимптотика.

Библиогр. 8 назв. Ил. 2.

ABSTRACTS

UDK 533.6.011

Buravtsev A. I., Matveev S. K., Naghibeda E. A. **80 years of the Department of Hydro-aeromechanics** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 3–18.

The paper is dedicated to the 80-th anniversary of the Department of Hydro-aeromechanics at the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saint-Petersburg State University. The main stages of the development of hydro-aerodynamics in Saint-Petersburg are briefly described, and short biographies of the former chairmen of the department are given. The paper presents the review of main scientific directions and achievements of the department at different stages of its development. At present the department conducts scientific investigations and prepares specialists in the following fields: physical-chemical gas dynamics, dynamics of complex media, computational hydro-gas-dynamics, supersonic gas dynamics, viscous fluid dynamics, and experimental aerodynamics. The paper is accompanied by the bibliography of works related to the history of the department.

Keywords: Hydro-aeromechanics, gas dynamics, history of development.

Bibliogr. 15 references. Fig. 8.

UDK 533.6.011

Kustova E. V., Naghibega E. A. **Kinetic description of non-equilibrium reacting flows of CO₂/O₂/CO/C/O mixture in the five-temperature approach** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 19–30.

In the present paper, a closed self-consistent description of the non-equilibrium reacting mixture CO₂/O₂/CO/C/O is developed on the basis of the kinetic theory of gases. Strongly non-equilibrium excitation of vibrational degrees of freedom for molecular species as well as dissociation, recombination and exchange reactions are considered. Complex internal structure of CO₂ molecules and different rates of vibrational energy exchanges are taken into account. The closed set of the equations for macroscopic parameters of a flow is derived in the five-temperature approximation from the kinetic equations for the distribution functions. The system contains conservation equations of mass, momentum and total energy coupled to the equations of five-temperature chemical and vibrational kinetics.

The expressions for the calculation of transport and source terms in these equations are derived on the basis of the kinetic theory methods. The transport terms are expressed via gradients of macroscopic parameters and transport coefficients. The paper presents general formulas for the transport coefficients of diffusion, thermal diffusion, bulk and shear viscosity, relaxation pressure, total heat conductivity coefficient and vibrational heat conductivity coefficients for asymmetric and coupled (symmetric-bending) CO₂ modes and for diatomic species O₂, CO.

Source terms are specified using the accurate kinetic theory algorithms including non-equilibrium vibrational level populations and state-depending rate coefficients for the energy transitions and reactions as well as approximate expressions containing relaxation times measured experimentally.

The proposed new kinetic model, while taking into account important features of CO₂ kinetics and mathematical principles of the kinetic theory, is suitable for practical realization in the computational fluid dynamics codes for simulations of high-temperature CO₂ mixtures flows.

Keywords: non-equilibrium flows, carbon dioxide, transport and relaxation processes.

Bibliogr. 17 references.

UDK 539.374

Lashkov V. A. **Coefficient of restitution under the oblique impact** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 31–38.

Solution of streamlining of an aircraft with two-phase flow (air carrying solid particles of dust) needs in describing of boundary conditions for the solid phase. As usually the particles are present in air constitute small debris of rock, which has extremely high hardness and irregular shape. They impact walls of a channel or a body under different angles of attack and in a wide range of speeds (100–1000 m/s). Method of calculation of coefficients of restitution under the oblique impact of a solid particle of dispersed flow on the surface is suggested. Approbation of the method was carried out with using of wellknown experimental data. Comparing the obtained data of calculation of coefficients of restitution with experimental data showed that they are in satisfactory agreement. Analysis of the obtained data showed that the value of coefficients of restitution depend on speed of rotation of the particle very much.

Keywords: coefficient of restitution, oblique impact, interaction model, experiment.

Bibliogr. 17 references. Fig. 5.

UDK 519.21

Miroshin R. N. **On some solutions of Chapman—Kolmogorov equation for discrete-state Markov processes with continuous time** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 39–44.

The nonlinear equation mentioned in title is the basic one of the theory of random Markov processes. In case of discrete-state processes solution thereof is the transition probability function. Usually this equation is solved by means of deriving to linear equations. In 1932 S. N. Bernstein tasked the problem from finding the solution directly. In 1961 O. V. Sarmanov found such solutions for stationary continuous-state Markov process in terms of bilinear series. In 2007 author obtained some solutions in terms of generalized bilinear series free from Sarmanov's restrictions. In this paper our results are extended to discrete-state processes. Two solutions of Chapman—Kolmogorov equation are obtained by means of deriving to some functional equation. Solutions are presented with a bilinear sum and generalized one, everyone sums term being directly proportional to the product of two orthogonal functions. Results are illustrated with examples of two-state processes, statements of the paper being easily verified. One more example indicated some solution of Chapman—Kolmogorov equation not to being probability significance.

Keywords: discrete-state Markov process with continuous time, transition probability function, solution of Chapman—Kolmogorov equation, functional equation, generalized bilinear sum.

Bibliogr. 8 references.

UDK 533.70:541:12:542.12

Petrov D. A., Tsibarov V. A. **The limit model of humid tornado** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 45–54.

The limit mathematical model of tornado dynamics is propounded. Approximating analytical solution for this model is done. The processes of local equilibrium evaporation and condensation of vapour on droplets and beds are taken into account. The local equilibrium or very slow disaggregation and aggregation processes of suspended particles are taken into account too. The estimations of the order physical processes in tornado are given. The effective power of polytropic curve of tornado is written. The properties of the approximating solution of limit mathematical tornado model and general properties of real tornado are matched. For example, tornado radius increase, but its tangential velocity and the longitudinal velocity decrease by height, the pressure decrease by height and when radial co-ordinate component $r \rightarrow 0$. The streamlines are expanding screw lines.

Keywords: tornado, stochastic (kinetic) method, polytropic, polytropic curve, coalescence (aggregation), coagulation, evaporation, condensation, streamline, expanding screw line, limit model.

Bibliogr. 16 references.

UDK 533.6:536:517

Rydalevskaya M. A. **Hierarchy of relaxation times and the model kinetic equations** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 55–62.

Gas mixtures with internal degrees of freedom and chemical reactions are considered. It is necessary to take into account molecular collisions with the change their internal energy of different kinds and chemical composition. It is known that molecular collisions of different kind happen with various frequency. It follows the hierarchy of relaxation times and the establishment of weakly non-equilibrium on some and strongly non-equilibrium on other degrees of freedom molecular distributions in gas flows. After analogy of the Krook equation, the model kinetic equations are proposed for the investigation of such flows. The correctness of H -theorem is proved. Closed systems of the equations for macroscopic parameters (extensive and intensive) are produced in different approaches of the Chapman—Enskog method. The preferences of transition from extensive to conjugate intensive parameters are discussed.

Keywords: kinetic gas theory, internal degrees of freedom, chemical reactions, model kinetic equations, extensive and intensive macroscopic parameters.

Bibliogr. 10 references.

UDK 517.977, 519.173

Abramovskaya T. V., Petrov N. N. **On some problems of the guaranteed search on graphs** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 63–69.

Pursuit-evasion differential games on graphs with no information on evader are considered. We pay special attention to ε -search problem which was stated by Golovach and is as follows. The topological graph embedded in three-dimensional Euclidean space is considered. For simplicity, we assume that the edges of graph are polygonal lines. Both pursuers and the evader possess the "simple motions" and the graph is

a phase restraint for all players. The goal of team of pursuers is construction of program depending only on graph structure which ensures "capture" of an "invisible" evader. We say that the evader is caught by a pursuer if both are on distance (in the inner metric of graph) lower or equal to the given nonnegative number ε . The problem consists of finding the minimum number of pursuers needed to catch the evader. This number is called ε -search number. We name the function which associates each nonnegative number ε with ε -search number as Golovach function. Properties of Golovach function are studied. Golovach and Petrov proved that Golovach function for a complete graph with more than 5 nodes has not-unit jumps. The examples of similar degeneration for the case of trees are known to authors of this article. These examples refute hypothesis that Golovach function for any planar graph has only unit jumps. The subclass of trees for which the Golovach function has only unit jumps is specified.

Keywords: guaranteed search, team of pursuers, evader, ε -capture, search numbers, Golovach function, unit jumps.

Bibliogr. 6 references. Fig. 1.

UDK 517.926.4

Begun N. A. **About existence of quadratically summable solutions for systems with weak non-linearity** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 70–78.

Consider question about structural stability of a systems under disturbance coefficients, with small $L^2(\mathbb{R})$ norm. Adduce conditions, enough so as to for every solution perturbed system exist solution initial system, approximate to solution of perturbed system in $L^2(\mathbb{R})$ norm.

Keywords: structural stability, hyperbolic system, linear system, heterogeneous system.

Bibliogr. 8 references.

UDK 517.925

Bibikov Yu. N., Bukaty V. R., Dorodnikov A. A. **Regular and singular periodic perturbations of an oscillator with cubic restoring force** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 79–89.

Small periodic in time both regular and singular perturbations of a system whose conservative part is an oscillator with cubic restoring force, are considered. The perturbations may depend and not depend on a small parameter.

In the first case, the conditions of the Liapunov stability of the state of equilibrium, are given. Under the presence of a small parameter, an equation whose positive roots generate invariant two-dimensional tori, is constructed.

Keywords: stability, invariant tori, singular perturbations.

Bibliogr. 6 references.

UDK 519.683.8, 004.424

Bugaychenko D. Y., Soloviev I. P. **Development of multi-root decision diagrams to represent integer functions** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 90–97.

We propose a new data structure for integer functions and matrices representation: multi-root binary decision diagrams (*MRBDD*). In addition we present algorithms to perform standard operations over functions and matrices represented using *MRBDD*-s. Because of more efficient reuse of similarly structured fragments multi-root binary decision diagrams provide a more compact representation comparing to widely used multi-terminal binary decision diagrams (*MTBDD*). Experimental results presented in the paper show that multi-root binary decision diagrams are a promising replacement for multi-terminal binary decision diagrams, including such problems as probabilistic verification, manipulating a probability distribution, the analysis of Petri nets and other computational models.

Keywords: binary decision diagrams, multi-terminal binary decision diagrams, function and matrices representation.

Bibliogr. 10 references. Fig. 1. Tabl. 1.

UDK 517.929

Zuber I. E. Gelig A. Kh. **Invariant stabilization of certain class of functional differential equations** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 98–105.

The following system $\dot{x} = A(\cdot)x + b_1(\cdot)u_1 + b_2(\cdot)u_2 + g(\cdot)$, $x(0) = x_0$, where $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$, is considered. The elements of matrices $A(\cdot)$, $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$, and $g(\cdot)$ are arbitrary functionals, for which the boundaries of varying are known only. The problem of determining controls $u_1(\cdot)$ and $u_2(\cdot)$, is considered

such that for any x_0 and $g(\cdot)$ the output of system $\sigma = (c, x)$ satisfies the invariance condition $\dot{\sigma} + \varepsilon\sigma = 0$ ($\varepsilon > 0$) under the boundedness of all trajectories $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \varkappa \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|g(\cdot)\|$. The solution of this problem is based on the construction of Lyapunov function with a constant Jacobian matrix of coefficients.

Keywords: uncertain systems, invariant stabilization, Lyapunov functions.

Bibliogr. 15 references.

UDK 519.21

Reshetov S. V. Minimax estimator of pseudo-periodic function, observed in stationary noise // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 106–115.

We consider the problem of estimating the pseudo-periodic function, observed on a large interval in stationary noise. It is assumed that the unknown function lies in the compact subset of the space of pseudo-periodic functions with the countable spectral set with separated elements. Lower and upper bounds for the minimax risk are obtained, the minimax estimator of the observed function is constructed.

Keywords: minimax risk, pseudo-periodic function, stationary process.

Bibliogr. 13 references.

UDK 539.3

Presniak V. A. Effect of the relation between rotational and vibrational energy in diatomic molecules on their vibrational distribution // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 116–124.

Two models of rotational movement of a molecule are compared: a model of a rigid rotator where dependence of molecule's rotational energy on its vibrational level is disregarded; and a model of a nonrigid rotator, which takes into account the relation between vibrational and rotational energy of a molecule. Appreciable effect of the relation between vibrations and rotations on rotational and complete statistical sums, as well as on equilibrium rotational and vibrational distributions in H_2 , N_2 и HCl , is demonstrated. Generalization of nonequilibrium Treanor distribution in two-temperature gas was obtained, which takes into account the relation between vibrational and rotational energy of molecule. This distribution is compared with Treanor distribution in the gas from rigid rotators for H_2 , N_2 и HCl .

Keywords: Treanor distribution, rotational energy, vibrational energy, diatomic molecules, rigid rotator.

Bibliogr. 8 references. Fig. 11. Tabl. 1.

UDK 517.958, 539.3

Grekov M. A. Joint deformation of a circular inclusion and matrix // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 125–133.

An elastic infinite plane with a circular inclusion at specified tractions and displacements jumps along the interface and under nonzero conditions at infinity is considered. Explicit expressions are derived for Goursat–Kolosov's complex potentials of this problem. The solution constructed can be used for the cases of different circular interfacial defects including interfacial cracks and rigid parts of the interface. It is pointed out that the problem is a base of a superposition method applied to solving a lot of problems in which a circular region is an element of polyphase elastic medium. In such a case, a correctness of the problem statement related with an actual dependance of traction jumps upon displacements jumps and vice versa entirely follows from the superposition method. The technique of the application of this method is demonstrated in this paper by the example of solving singular problems on action of a point force and an edge dislocation located in the inclusion or in the matrix. Computational results of the tractions arising at the interface under action of the point force in the inclusion are given.

Keywords: Goursat–Kolosov's complex potential, circular interfacial, superposition method, singular problem.

Bibliogr. 15 references. Fig. 3.

UDK 539.3

Lukin A. A., Morozov V. A. Crack growth initialization under a short-duration pulse loading // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 134–139.

Two experimental methods of a crack growth initialization in Polymethyl methacrylate (PMMA) and of its velocity measurement under a pulse loading by using an electric explosion of conductors are proposed. A threshold value of the destructive loading amplitude under dynamic loading is determined. A numerical solution to the crack movement equation at is different initial length is obtained. A transition time for a

crack to move at a constant velocity is estimated. The obtained numerical results are in a good agreement compared to the experimental data.

Keywords: crack growth initialization, crack propagation, dynamic fracture, impulse loading, electrical conductor explosion.

Bibliogr. 4 references. Fig. 7.

UDK 539.3

Platonov V. V. The stability of the transversely isotropic spherical shell under the normal loading // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 140–143.

The stability of the transversely isotropic spherical shell under the action of uniformly distributed along the surface normal pressure is considered. The problem is investigated by the Ambartsumian refined theory and the classical formulation. The critical pressure for the case of a transversely isotropic and isotropic materials are compared. Conditions in which the theory takes into account the influence of transverse shear, significantly refines the classical theory are defined.

Keywords: transversely isotropic spherical shell, refined theory, parameter of the transverse shear stiffness, the Ambartsumian theory.

Bibliogr. 4 references. Tabl. 1.

UDK 521.14

Shaidulin V. Sh. Laplace series for the potential of a spherical sector // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2010. Issue 2. P. 144–151.

Exact expression for the gravitational potential on the symmetry axis of a spherical sector is deduced for an arbitrary spread angle 2α . In the limiting case $\alpha \rightarrow 0$ we deal with the potential of a heterogeneous rod with a density proportional to the square distance from the top of the sector. Simple formulas for harmonic coefficients of the potential and their asymptotics at $n \rightarrow \infty$ are obtained for the infinitely narrow sector. An algorithm of coefficients calculation is constructed, and their asymptotics is obtained in the general case. These results will be applied to analysis of the existing geopotential models which contain harmonics up to n of the order of 10^3 .

Keywords: Gravitational potential, Laplace series, uniform and mean-squared norm, asymptotics.

Bibliogr. 8 references. Fig. 2.

CONTENTS

To the 80-th anniversary of Department of Hydro-aeromechanics

<i>Buravtsev A. I., Matveev S. K., Nagnibeda E. A.</i> 80 years of the Department of Hydro-aeromechanics	3
<i>Kustova E. V., Nagnibega E. A.</i> Kinetic description of non-equilibrium reacting flows of CO ₂ /O ₂ /CO/C/O mixture in the five-temperature approach	19
<i>Lashkov V. A.</i> Coefficient of restitution under the oblique impact	31
<i>Miroshin R. N.</i> On some solutions of Chapman—Kolmogorov equation for discrete-state Markov processes with continuous time	39
<i>Petrov D. A., Tsibarov V. A.</i> The limit model of humid tornado	45
<i>Rydalevskaya M. A.</i> Hierarchy of relaxation times and the model kinetic equations	55

Mathematics

<i>Abramovskaya T. V., Petrov N. N.</i> On some problems of the guaranteed search on graphs	63
<i>Begun N. A.</i> About existence of quadratically summable solutions for systems with weak non-linearity	70
<i>Bibikov Yu. N., Bukaty V. R., Dorodenkov A. A.</i> Regular and singular periodic perturbations of an oscillator with cubic restoring force	79
<i>Bugaychenko D. Y., Soloviev I. P.</i> Development of multi-root decision diagrams to represent integer functions	90
<i>Zuber I. E., Gelig A. Kh.</i> Invariant stabilization of certain class of functional differential equations	98
<i>Reshetov S. V.</i> Minimax estimator of pseudo-periodic function, observed in stationary noise	106

Mechanics

<i>Presniak V. A.</i> Effect of the relation between rotational and vibrational energy in diatomic molecules on their vibrational distribution	116
<i>Grekov M. A.</i> Joint deformation of a circular inclusion and matrix	125
<i>Lukin A. A., Morozov V. A.</i> Crack growth initialization under a short-duration pulse loading	134
<i>Platonov V. V.</i> The stability of the transversely isotropic spherical shell under the normal loading	140

Astronomy

<i>Shaidulin V. Sh.</i> Laplace series for the potential of a spherical sector	144
--	-----

Papers	152
---------------	-----

Abstracts	157
------------------	-----