

ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1
Выпуск 1

2012
Март

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. ИЗДАЕТСЯ С АВГУСТА 1946 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Даугавет И. К.</i> Об одном классе численных методов решения жестких систем дифференциальных уравнений	3
<i>Ермаков С. М., Видяева К. О.</i> Об оценке спектра линейного оператора	11
<i>Звягинцева Т. Е.</i> Критерии существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисом	18
<i>Зубер И. Е.</i> Стабилизация дискретных систем динамическим регулятором	27
<i>Красулина Т. П.</i> О сходимости снизу процесса Роббинса-Монро при малых шагах	31
<i>Крылов В. А.</i> Периодические решения одного класса функционально-дифференциальных уравнений	35
<i>Логинова Е. А.</i> Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной	40
<i>Пажнущева М. Ю.</i> Исследование свойств моментных инвариантов в задачах анализа изображений	48
<i>Сипин А. С.</i> Статистические алгоритмы решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка «Сопряженная схема»	57
<i>Смирнов С. И.</i> Стохастический вариант метода вырожденных ядер для решения больших систем линейных уравнений со слабозаполненной матрицей	68



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ
1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

© Авторы статей, 2012

© Издательство
Санкт-Петербургского
университета, 2012

МЕХАНИКА

<i>Арутюнян Р. А., Арутюнян А. Р.</i> Формулировка критерия прочности нелинейно-упругой среды с трещиной	73
<i>Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Романова А. А.</i> О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления ..	80
<i>Кустова Е. В., Мехоношина М. А.</i> Релаксационное давление в смеси $N_2 - N$ с учетом неравновесной реакции диссоциации	86
<i>Морозов В. А., Шипилов С. С.</i> Моделирование разлета мелкодисперсных частиц при электрическом взрыве проводников	96
<i>Морщинина Д. А.</i> Напряженное состояние и прочность интраокулярных линз: (теория и эксперимент)	102
<i>Товстик П. Е., Шеховцов А. С., Шеховцов В. А.</i> Морская стационарная платформа под действием ледовой нагрузки	107
<i>Усков В. Н., Мостовых П. С.</i> Отражение слабого газодинамического разрыва от оси симметрии в однородном потоке	117

АСТРОНОМИЯ

<i>Витязев В. В., Цветков А. С.</i> Кинематические исследования собственных движений звезд зонных каталогов	128
<i>Степанова К. В.</i> Кривые вращения галактик с учетом эффекта проекции и конечной ширины щели спектрографа	137

ХРОНИКА

Заседания секции теоретической механики им. Н. Н. Поляхова Дома Ученых РАН 27 октября 2010	85
16 февраля 2011	116
Аннотации	147
Abstracts	154
Contents	160

АННОТАЦИИ

УДК 519.622

Даугавет И. К. **Об одном классе численных методов решения жестких систем дифференциальных уравнений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 3–10.

Рассматривается модификация метода типа метода Коуэлла, состоящая в том, что из полученных на одном шаге значений решения в нескольких точках сохраняются лишь первые из них. Изучаются вопросы устойчивости таких методов. В частности, указывается один метод из этой группы, который при четвертом порядке точности устойчив для жестких систем при любом выборе шага интегрирования.

Ключевые слова: численное решение задачи Коши, метод Коуэлла, устойчивость, жесткие системы.

Библиогр. 4 назв. Ил. 1.

УДК 519.71

Видяева К. О., Ермаков С. М. **Об оценке спектра линейного оператора** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 11–17.

В данной работе рассмотрены новые подходы к анализу спектра линейных операторов. Предложены алгоритмы вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы, основанные на известном методе Крылова, SSA-разложении и методе рекуррентного сдвига «Гусеница». Полученное обобщение позволяет иметь дело с матрицами бесконечного порядка, что является важным приложением для решения задач массового обслуживания. Приведены результаты численных экспериментов для матриц различных порядков.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, минимальный многочлен матрицы, спектр линейного оператора.

Библиогр. 6 назв. Табл. 4.

УДК 531.36:534.1

Звягинцева Т. Е. **Коэффициентные критерии существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисом** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 18–26.

В работе через коэффициенты системы получены необходимые и достаточные условия существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисной нелинейностью.

Ключевые слова: автоматическое управление, гистерезис, устойчивость, существование предельного цикла.

Библиогр. 7 назв. Ил. 4.

УДК 517.929

Зубер И. Е. **Стабилизация дискретных систем динамическим регулятором** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 27–30.

Рассматривается система

$$x_{k+1} = A_k x_k + b_k u_k,$$

$$u_{k+1} = m_k^* x_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_k \in \mathbb{R}^n$, $m_k \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что A_k является матрицей Фробениуса, последний элемент вектора b_k является нулевым и все элементы A_k и b_k ограничены при всех k . С помощью квадратичной функции Ляпунова с диагональной матрицей коэффициентов находятся m_k и такие условия на b_k , при которых система становится глобально асимптотически устойчивой.

Ключевые слова: дискретные системы, стабилизация, динамический регулятор, функция Ляпунова.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.245

Красулина Т. П. **О сходимости снизу процесса Роббинса—Монро при малых шагах** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 31–34.

Рассматривается введенная Анбаром модификация процесса Робинса—Монро

$$X_{n+1} = X_n - a_n(Y_n(X_n) + b_n),$$

где $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ — заданные последовательности чисел, $Y_n(X_n)$ — наблюдения некоторой случайной величины $Y(x)$ при фиксированном значении X_n , X_1 — начальная случайная величина.

Обозначим через $M(x)$ математическое ожидание случайной величины $Y(x)$. Получен следующий результат.

Теорема. Пусть выполняются условия:

- 1) $M(x) > 0$ при $x > \theta$, $M(x) < 0$ при $x < \theta$, $M(\theta) = 0$, $\inf |M(x)| > 0$ при $\varepsilon < |x - \theta| < \varepsilon^{-1}$ и любом $0 < \varepsilon < 1$,
- 2) $E Z^2(x) \leq K < \infty$, $Z(x) = Y(x) - M(x)$, где $K > 0$ — некоторая константа,
- 3) $M(x)$ дифференцируемо в точке θ и $M'(\theta) = \alpha$,
- 4) $|M(x)| \leq C|x| + D$, где $C \geq 0$, $D \geq 0$ — некоторые константы,
- 5) $a_n = A/n$, $2A\alpha < 1$, $b_n = b/n^\beta$, $b > 0$, $A > 0$, $\beta < A\alpha$.

Тогда

$$P(X_n \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty) = 1,$$

$$P(X_n \leq \theta, n \geq N(\omega)) = 1,$$

где $N(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — некоторое достаточно большое число.

Ключевые слова: стохастическая аппроксимация, процесс Робинса—Монро, функция регрессии.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517.929

Крылов В. А. **Периодические решения одного класса функционально-дифференциальных уравнений** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 35–39.

Рассматривается нелинейная импульсная система

$$\dot{x} = Ax + bf, \quad \sigma = c^*x + \psi.$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — постоянная гурвицева матрица, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ и $c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, ψ — постоянная, отличная от нуля, σ, f — сигналы на входе и выходе модулятора, который генерирует мгновенные импульсы, описываемые дельта-функциями: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \delta(t - t_n)$, где

$$\lambda_n = \begin{cases} \text{sign} \sigma(t_n - 0), & \text{если } \sigma(t_n - 0) \neq 0; \\ 0, & \text{если } \sigma(t_n - 0) = 0; \end{cases}$$

$t_{n+1} = t_n + \tau, n = 0, 1, \dots$ τ — наименьший положительный корень уравнения

$$\left| \int_0^\tau \sigma(t_n + \lambda) e^{-\varepsilon(\tau - \lambda)} d\lambda \right| = \Delta,$$

где Δ, ε — положительные постоянные.

При помощи построения области в фазовом пространстве, где оператор сдвига по траекториям непрерывен, получены достаточные условия существования периодического решения с одним импульсом на периоде.

Ключевые слова: нелинейная импульсная система, периодическое решение.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.9

Логинова Е. А. **Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 40–47.

Рассматривается задача, описывающая распределение температуры в неоднородном материале (FGM) с трещиной с учётом времени. Изучается двумерный случай. Неоднородность материала описывается функцией $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности перпендикулярен трещине. Задача сведена к обобщенной задаче Коши, построены тепловые потенциалы и решение задачи, изучены их свойства. Получены асимптотики решения и его производных по расстоянию до концов трещины, по времени, а также двойные асимптотики по времени и расстоянию до концов трещины.

Ключевые слова: тепловые потенциалы, неоднородная плоскость с разрезом (трещиной) по отрезку, асимптотики решения по расстоянию до концов трещины, постановка краевых условий.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.688

Пахнущева М. Ю. **Исследование свойств моментных инвариантов в задачах анализа изображений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 48–56.

Применение теории моментных инвариантов для решения задач распознавания образов имеет некоторые особенности. Результаты теории моментных инвариантов получены для случая функций, определенных в R^2 . В действительности вычисления производятся по кусочно-линейным аппроксимациям исходных образов — пиксельным изображениям. Имеется зависимость между величиной подробности растра, а также типом образа и результатом идентификации.

Ключевые слова: распознавание образов, моментные инварианты, растр.

Библиогр. 15 назв. Ил. 2. Табл. 5.

УДК 519.71

Сипин А. С. **Статистические алгоритмы решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка. «Сопряженная» схема** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 57–67.

Данная работа является продолжением работы [3]. В ней рассмотрен новый алгоритм метода Монте-Карло решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами. Построены несмещенные оценки функционалов от решения этой задачи. В отличие от работы [3], рассматривается «сопряженная» схема построения несмещенных оценок функционалов от решения интегрального уравнения, эквивалентного задаче Коши. Это позволяет упростить процедуру моделирования, так как теперь не нужно знать границы спектра для матрицы старших коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, статистическое моделирование, уравнение теплопроводности, задача Коши.

Библиогр. 7 назв.

УДК 519.71

Смирнов С.И. **Стохастический вариант метода вырожденных ядер для решения больших систем линейных уравнений со слабозаполненной матрицей** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 68–72.

В работе предложен стохастический метод решения СЛАУ со слабозаполненными матрицами. Метод основан на выделении главной части матричного оператора в виде вырожденного ядра. Приведены результаты численного эксперимента, свидетельствующие об эффективности метода.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), слабозаполненная матрица, метод вырожденных ядер, метод Монте-Карло.

Библиогр. 5 назв. Табл. 1.

УДК 539.4

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. **Формулировка критерия прочности нелинейно-упругой среды с трещиной** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 73–79.

На основе реологических соотношений, описывающих поведение нелинейно-упругих материалов, и энергетической концепции Гриффитса разработан критерий прочности образца с трещиной. В случае абсолютно хрупкой среды критерий совпадает с критерием прочности Гриффитса. В общем случае критерий зависит от текущего коэффициента поперечной деформации. При этом сохраняется гиперболический характер зависимости критической длины трещины от величины критического напряжения. По полученным критериям прочности оцениваются значения теоретической и реальной прочности. Рассмотрены три случая: идеальная кристаллическая решетка без дефектов, нитевидные нанокристаллические и нанокompозитные материалы с размерами дефектов в пределах нескольких нанометров, лабораторный образец с микронным размером дефектов. Показано, что величина теоретической прочности на два порядка больше значения прочности лабораторного образца. В случае материалов с дефектами, имеющих порядок наноразмеров, наблюдается значительное снижение прочности (в пределах одного порядка от теоретической прочности).

Ключевые слова: нелинейно-упругая среда, энергетическая концепция Гриффитса, текущий коэффициент поперечной деформации, критическая длина трещины, критическое напряжение, теоретическая прочность, реальная прочность.

Библиогр. 14 назв. Ил. 3.

УДК 539.3, 519.6

Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Романова А.А. **О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 80–85.

Рассматривается осесимметричная устойчивость изотропной неоднородной круглой пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением. Полагая, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер, численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Показано, что при уменьшении к краю пластины модуля упругости бифуркация в несимметричное состояние происходит при существенно меньшей нагрузке, чем для пластины с постоянными механическими свойствами. Одним из возможных объяснений появления складок по краю решетчатой пластины глаза может быть переход из симметричного деформированного состояния в несимметричное.

Ключевые слова: круглая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

Библиогр. 8 назв. Ил. 2. Табл. 2.

УДК 533.6.011

Кустова Е. В., Мехоношина М. А. **Релаксационное давление в смеси $N_2 - N$ с учетом неравновесной реакции диссоциации** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 86–95.

В работе методами кинетической теории изучается влияние неравновесных химических реакций на диагональные члены тензора напряжений. Построена математическая модель для расчета релаксационного давления в смеси $N_2 - N$, в которой протекает реакция диссоциации. Проведен расчет релаксационного давления в диапазоне температур 2000–10000 К для различных значений гидростатического давления и молярных долей атомов и молекул. Оценено влияние состава смеси и степени отклонения от равновесия на релаксационное давление.

Ключевые слова: кинетическая теория процессов переноса, релаксационное давление, неравновесная реакция диссоциации.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3.

УДК 533.17, 531.58

Морозов В. А., Шипилов С. С. **Моделирование разлета мелкодисперсных частиц при электрическом взрыве проводников** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 96–101.

Предложен метод экспериментального моделирования высокоскоростного соударения мелкодисперсных частиц с преградой. Рассмотрена математическая модель данного процесса. Результаты эксперимента и численной модели имеют хорошее совпадение.

Ключевые слова: электрический взрыв проводников, мелкодисперсные частицы, высокоскоростное взаимодействие, численное моделирование.

Библиогр. 5 назв. Ил. 6. Табл. 1.

УДК 539.3

Морщинина Д. А. **Напряженное состояние и прочность интраокулярных линз (теория и эксперимент)** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 102–106.

Статья посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию интраокулярных линз (ИОЛ) с С-образной гаптикой, которые применяются при хирургическом лечении катаракты.

Для оценки напряженно-деформированного состояния ИОЛ оптическая часть представляется тонким упругим диском, опорные элементы — тонкими криволинейными стержнями, жестко заделанными на контуре диска и абсолютно свободными на другом конце. На основании соотношений плоской теории упругости выведены выражения для напряжений и перемещений в оптическом диске, нагруженном на контуре самоуравновешенными сосредоточенными силами и моментами. С позиции нелинейной теории тонких криволинейных стержней получены формулы для изгибающих моментов в точке соединения опорного элемента с оптическим диском.

В ходе экспериментальных исследований ИОЛ определена деформация опорных элементов. Проведен сравнительный качественный анализ прочности составных и монолитных интраокулярных линз с С-образной гаптикой.

Ключевые слова: теория упругости, интраокулярные линзы, опорные элементы, упругий диск, тонкие криволинейные стержни, сосредоточенные силы и моменты, перемещение, деформация, прочность.

Библиогр. 11 назв. Ил. 6.

УДК 517.9:539.3

Товстик П. Е., Шеховцов А. С., Шеховцов В. А. **Морская стационарная платформа под действием ледовой нагрузки** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 107–116.

Рассматривается статика морской стационарной платформы под действием ледовой нагрузки. Платформа моделируется двумя твердыми телами, соединенными гибким нелинейно упругим трубобетонным стержнем кольцевого сечения. Верхнее тело находится под действием сил веса, горизонтальной ледовой нагрузки и изгибающего момента. Нижнее тело (фундамент) может поворачиваться. Введена угловая жесткость фундамента. Рассматривается нелинейный изгиб стержня вплоть до опрокидывания платформы, отдельно исследована окрестность предельной точки на кривой нагрузка—прогиб. Жесткость конструкции может оказаться недостаточной при наличии большой ледовой нагрузки, поэтому рассмотрена также платформа, опертая на несколько таких стержней (например, семь стержней). Анализ ограничен нагрузками, при которых стержни работают в линейно-упругой области. Получено приближенное аналитическое решение, точность которого оценена путем сравнения с точным численным решением. Проведено сравнение результатов для платформ, опертых на один и на несколько стержней.

Ключевые слова: морская стационарная платформа, нелинейно упругий гибкий стержень, предельная точка.

Библиогр. 8 назв. Ил. 4. Табл. 2.

УДК 533.6.011.72

Мостовых П. С., Усков В. Н. **Отражение слабого газодинамического разрыва от оси симметрии в однородном потоке** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 117–127.

Рассматривается стационарное течение невязкого нетеплопроводного совершенного газа в окрестности точки регулярного отражения слабого газодинамического разрыва от оси симметрии. Граничные условия на падающем на ось симметрии слабом разрыве ставятся на основании условий совместности для функции Прандтля—Мейера, полярного угла вектора скорости и их первых производных вдоль линии тока и по нормали к ней. Получена асимптотика решения для безразмерных газодинамических параметров (функции Прандтля—Мейера и полярного угла вектора скорости) в окрестности точки отражения. Показано, что из точки отражения исходит отраженный слабый разрыв. В полученном решении имеет место логарифмическая особенность первых производных газодинамических переменных по полярному углу в меридиональной плоскости в окрестности отраженного слабого газодинамического разрыва.

Ключевые слова: слабый разрыв, сверхзвуковые осесимметричные течения, отражение и прохождение через ось симметрии.

Библиогр. 8 назв. Ил. 3.

УДК 524.4

Витязев В. В., Цветков А. С. **Кинематические исследования собственных движений звезд зонных каталогов** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 128–136.

Построена система векторных сферических функций, обладающих свойствами полноты и ортогональности на множестве точек сферы, заключенных между двумя кругами склонений. С помощью этих функций построен метод кинематического анализа собственных движений звезд для зонных каталогов. Показано, что метод векторных сферических функций обладает целым рядом преимуществ по сравнению с обычным подходом, основанным не непосредственном оценивании параметров выбранной кинематической модели методом

наименьших квадратов. Проведено испытание метода с помощью численных экспериментов. В дальнейшем метод векторных сферических функций будет применен для анализа собственных движений звезд каталога Tucano-2, расположенных в южном экваториальном полушарии небесной сферы.

Ключевые слова: фундаментальная астрономия, астрометрия, звездная кинематика, структура Галактики, Hipparcos.

Библиогр. 14 назв. Табл. 1.

УДК 524.7-327

Степанова К. В. **Кривые вращения галактик с учетом эффекта проекции и конечной ширины щели спектрографа** // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 137–146.

В работе рассматривается влияние эффекта проекции на вид наблюдаемых кривых вращения галактик, диски которых расположены под произвольным углом к лучу зрения, с учетом конечной ширины щели спектрографа. Было изучено проявление данного эффекта с учетом ненулевой толщины щели для различных углов наклона и расстояний до галактик.

Ключевые слова: кинематика галактик, кривые вращения, эффект проекции.

Библиогр. 5 назв. Ил. 6.

ABSTRACTS

UDK 519.622

Daugavet I. K. **On a class of numerical methods for solving stiff systems of differential equations** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 3–10.

A modification of Cowell's method is considered. From values of the solution obtained by one step of the method at several points, only the first ones are kept. The stability of this modification is studied. One method of this group has fourth-order accuracy and is stable for any integration stepsize.

Keywords: numerical solution of the Cauchy problem, Cowell's method, stability, stiff systems.

Bibliogr. 4 references. Fig. 1.

UDK 519.71

Vidyaeva K. O., Ermakov S. M. **Spectrum assessment of linear operators** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 11–17.

New approaches are considered for the spectral analysis of linear operators. We propose new algorithms to calculate the coefficients of the minimal matrix polynomial based on the following three known methods: Krylov, SSA decomposition, and shift recursive "Caterpillar". This generalization can be applied to infinite order matrices and for solving queuing problems. We present numerical experiments with matrices of different orders.

Keywords: Monte Carlo methods, minimal matrix polynomial, spectrum of linear operator.

Bibliogr. 6 references. Tabl. 4.

UDK 531.36:534.1

Zviagintseva T. E. **Coefficient criteria on the existence of limit cycles in two-dimensional systems with hysteresis** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 18–26.

Necessary and sufficient conditions on the existence of limit cycles in two-dimensional systems with nonlinear hysteresis are given in terms of the coefficients of the system.

Keywords: automatic control, hysteresis, stability, existence of limit cycle.

Bibliogr. 7 references. Fig. 4.

UDK 517.929

Zuber I. E. **Stabilization of discrete-time systems by dynamic control** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 27–30.

The system

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + b_k u_k, \\ u_{k+1} &= m_k^* x_k, \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

is considered. Here $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_k \in \mathbb{R}^n$, $m_k \in \mathbb{R}^n$. It is proposed that A_k is a Frobenius matrix, the last element of b_k is equal to zero and all elements of A_k and b_k are bounded for all k . By a quadratic Lyapunov function with diagonal matrix of coefficients m_k and b_k , conditions are obtained, at which the system becomes globally asymptotically stable.

Keywords: discrete-time systems, stabilization, dynamic control, Lyapunov function.

Bibliogr. 2 references.

Krasulina T. P. On the convergence from below of the Robbins—Monro process for small steps // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 31–34.

We consider the following modification of the standard Robbins—Monro process introduced by Anbar:

$$X_{n+1} = X_n - a_n(Y_n(X_n) + b_n),$$

where $a_n \geq 0$ and $b_n \geq 0$ are given sequences of scalars, $Y_n(X_n)$ are observations of the random variable $Y(x)$ for given X_n and X_1 is the initial value of X_n .

Let $M(x)$ denote the mathematical expectation of the random variable $Y(x)$. The main result of the paper is as follows.

Theorem. *Suppose that the following conditions are fulfilled:*

- 1) $M(x) > 0$ for $x > \theta$ and $M(x) < 0$ for $x < \theta$, $M(\theta) = 0$, $\inf |M(x)| > 0$ for $\varepsilon < |x - \theta| < \varepsilon^{-1}$ and all $0 < \varepsilon < 1$,
- 2) $E Z^2(x) \leq K < \infty$, $Z(x) = Y(x) - M(x)$, where $K > 0$ is some constant,
- 3) $M(x)$ is differentiable at θ and $M'(\theta) = \alpha$,
- 4) $|M(x)| \leq C|x| + D$, where $C \geq 0$ and $D \geq 0$ are some constants,
- 5) $a_n = A/n$, $2A\alpha < 1$, $b_n = b/n^\beta$, $b > 0$, $A > 0$, $\beta < A\alpha$.

Then the following relations hold:

$$\begin{aligned} P(X_n \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty) &= 1, \\ P(X_n \leq \theta, n \geq N(\omega)) &= 1, \end{aligned}$$

where the number $N(\omega)$, for $\omega \in \Omega$, is sufficiently large.

Keywords: stochastic approximation, Robbins—Monro process, regression function.

Bibliogr. 10 references.

Krylov W. A. Periodic solutions of a class of functional differential equations // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 35–39.

The nonlinear pulse system

$$\dot{x} = Ax + bf, \quad \sigma = c^*x + \psi,$$

is considered, where $A \in R^{m \times m}$ is a Hurwitz matrix, $b \in R^{m \times 1}$, $c \in R^{m \times 1}$, ψ is a nonzero constant, σ and f are signals at the input and output of the modulator which generates an instantaneous pulse, and $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \delta(t - t_n)$. Here

$$\lambda_n = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sigma(t_n - 0), & \text{if } \sigma(t_n - 0) \neq 0, \\ 0, & \text{if } \sigma(t_n - 0) = 0, \end{cases}$$

$t_{n+1} = t_n + \tau$, $n = 0, 1, \dots$, and τ is the first positive root of the equation

$$\left| \int_0^\tau \sigma(t_n + \lambda) e^{-\varepsilon(\tau - \lambda)} d\lambda \right| = \Delta.$$

where Δ and ε are positive constants.

Sufficient conditions for the existence of periodic solutions with a single pulse per period are obtained by a construction in the phase space where the shift operator along the trajectories is continuous.

Keywords: nonlinear pulse system, periodic solution.

Bibliogr. 4 references.

UDK 517.9

Loginova E. A. **Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 40–47.

The problem considered describes the temperature distribution in a heterogeneous material (FGM) with a crack as a function of time. The two-dimensional case is studied. The heterogeneity of the material described by the function $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$ that corresponds to the situation of the vector direction of change of inhomogeneity is perpendicular to the crack. The problem is reduced to a generalized Cauchy problem. Heat potentials and solutions are built, and their properties are investigated. Asymptotic solutions are obtained for the distance to the ends of the cracks.

Keywords: thermal potentials, non-homogeneous plane with a crack on a segment, asymptotic solution for the distance to the ends of the crack, setting up boundary conditions.

Bibliogr. 4 references.

UDK 519.688

Pakhnushcheva M. Yu. **Investigation of the features of moment invariants in image processing** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 48–56.

Moment invariants for image processing and pattern recognition are studied. Results from the theory of moment invariants have been obtained for functions defined in R^2 . But, in fact, we have piecewise-linear approximations of source images and perform calculations on the digital pictures. There is a dependency in identifying results from the quantization stage and the image type.

Keywords: moment invariants, pattern recognition, image processing, quantization.

Bibliogr. 15 references. Fig. 2. Tabl. 5.

UDK 519.71

Sipin A. S. **Simulation methods for second-order parabolic Cauchy problem. “Conjugate” scheme** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 57–67.

This paper continues our paper in Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2011, Vol. 44, No. 3, pp. 223-232, (© Allerton Press, Inc., 2011). We investigate a new Monte Carlo algorithm for a second-order parabolic Cauchy problem when the coefficient matrix is sufficiently smooth. Unbiased estimators are constructed for functionals of the Cauchy problem solution. We construct a “conjugate” scheme to estimate functionals of solutions for integral equations which is equivalent to the Cauchy problem. Now it is not necessary to know the bounds of the spectrum for the coefficient matrix. This simplifies the simulation procedure.

Keywords: Monte Carlo methods, simulation method, heat equation, Cauchy problem.

Bibliogr. 7 references.

UDK 519.71

Smirnov S. I. **Stochastic version of the degenerate kernel method for large systems of linear equations** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 68–72.

A stochastic method for solving systems of linear algebraic equations with sparse matrices is proposed. The method is based on the representation of the main part of the operator by degenerate kernels. Numerical results show the effectiveness of the method on hand.

Keywords: system of linear algebraic equations (SLAE), sparse matrix, degenerate kernels method, Monte Carlo method.

Bibliogr. 5 references. Tabl. 1.

UDK 539.4

Arutyunyan A. R., Arutyunyan R. A. **Formulation of the strength criterion of a nonlinear elastic medium with a crack** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 73–79.

Taking the current value of the coefficient of lateral deformation into account, the rheological relation describing the behavior of nonlinear elastic materials (ceramics, nanocrystalline and nanocomposite materials) is introduced. In these materials the elastic deformation can be reached within 3 per cent. The relation is used to formulate the strength criterion for the specimen with a crack, based on the Griffith energy approach. In particular, for a brittle material, when the coefficient of lateral deformation is equal to zero, the obtained criterion is identical with Griffith's fracture law. In the general case, the criterion is dependent on the coefficient of lateral deformation. Similar to Griffith's criterion, the critical value of the crack length as a function of the critical value of the stress is governed by a hyperbolic law. According to the obtained criteria, the values of the theoretical and the real strengths are estimated.

Keywords: Nonlinear elastic medium, Griffith's energy approach, current value of the coefficient of lateral deformation, critical value of the crack length, critical value of the stress, theoretical strength, real strength.

Bibliogr. 14 references. Fig. 3.

UDK 539.3, 519.6

Bauer S. M., Voronkova E. B., Romanova A. A. **On the unsymmetric buckling of circular plates under normal pressure** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 80–85.

The stability of axisymmetric equilibrium states of an isotropic non-homogeneous circular plate under uniform pressure is considered. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinates. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties. The folds in the narrow zone at the periphery of the Lamina Cribrosa (LC) of the human eye could be explained by the buckling of the axisymmetric state of the LC in the nonaxisymmetric state.

Keywords: circular plate, buckling, non-homogeneity.

Bibliogr. 8 references. Fig. 2. Tabl. 2.

UDK 533.6.011

Kustova E. V., Mekhonoshina M. A. **Relaxation pressure in an $N_2 - N$ mixture with non-equilibrium dissociation reaction** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 86–95.

The influence of non-equilibrium chemical reactions on the diagonal terms of the pressure tensor is studied using kinetic theory methods. A mathematical model for evaluating the relaxation pressure in an $N_2 - N$ mixture with dissociation reaction is developed. The relaxation pressure is calculated in the temperature range 2000 to 10 000 K for different values of the hydrostatic pressure and species molar fractions. The influence of the mixture composition and the deviation from the chemical equilibrium on the relaxation pressure is analyzed.

Keywords: kinetic theory of transport process, relaxation pressure, non-equilibrium dissociation reaction.

Bibliogr. 6 references. Fig. 3.

UDK 533.17, 531.58

Morozov V. A. Shipilov S. S. **Modeling high dispersed particles scattering at an electric explosion of conductors** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 96–101.

Experimental modeling of high-speed impact, highly dispersed particles with a barrier is presented. The mathematical model of the given process is considered. The experimental results and the numerical model agree well.

Keywords: electric explosion of conductors, highly dispersed particles, high-speed impact, numerical simulation.

Bibliogr. 5. Fig. 6. Tabl. 1.

UDK 539.3

Morshinina D. A. **Stress state and strength of intraocular lenses (theory and experiment)** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 102–106.

This article is devoted to the theoretical and experimental investigation of intraocular lenses (IOL) with C-shaped haptics which are used in surgical treatment of cataracts.

The stress-strain state of the IOL optical part is estimated by considering a thin elastic disk and supporting elements as thin curvilinear bars rigidly fixed on the contour of the disk and totally free at the other end. By the plane theory of elasticity, we obtain expressions for the stresses and displacements in the optical disk loading self-balanced concentrated forces and moments on the contour. On the basis of the nonlinear theory of thin curvilinear bars, we obtain expressions for the bending moments at supporting points of junction of elements with the optical disk.

In the course of experimental investigations of the IOL, the deformation of the supporting elements was determined. A comparative qualitative analysis of the strength of one-piece and composite IOL with C-shaped haptics was done.

Keywords: theory of elasticity, intraocular lens, supporting elements, elastic disk, thin curvilinear bars, concentrated forces and moments, stresses, displacements, deformation, strength.

Bibliogr. 11 references. Fig. 6.

UDK 517.9:539.3

Tovstik P. E., Shekhovtsov A. S., Shekhovtsov V. A. **Marine stationary platform under the action of ice loading** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 107–116.

The statics of a marine stationary platform under the action of ice loading is studied. The platform is modeled by two rigid bodies tied by a flexible nonlinear elastic iron-concrete rod with a circular cross section. The upper body is under the action of a weight, of a horizontal ice load, and of a bending moment. The lower body (foundation) can rotate. The foundation angular

stiffness is introduced. A nonlinear bending of the rod until a platform fall is studied. Separately, a neighborhood of a limiting point in the curve “load-deflection” is investigated. The structure stiffness may be too small in the case of a large ice load, that is why the platform supported on a number of such rods (for example, seven rods) is also studied. In this case, the analysis is restricted by the loads, for which the rods are linearly elastic. The error in the approximate analytical solution is estimated by comparing it with the exact numerical solution. The results for platforms supported by one rod and by seven rods agree.

Keywords: marine stationary platform, nonlinearly elastic flexible rod, limiting point.

Bibliogr. 8 references. Fig. 4. Tabl. 2.

UDK 533.6.011.72

Mostovyykh P. S., Uskov V. N. **Reflection of a weak discontinuity from an axis of symmetry in a uniform flow** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 117–127.

This paper considers the steady supersonic axisymmetric flow of a non-viscous non-heat-conductive perfect gas in the vicinity of a weakly discontinuous reflection point from an axis of symmetry. The boundary conditions on the incoming weak discontinuity to the axis of symmetry are formulated based on the compatibility conditions for the Prandtl–Meyer function, the velocity vector inclination angle and its first derivatives along the flow line and the normal to it. The asymptotic form of the solution for the nondimensional gasdynamic parameters (the Prandtl–Meyer function and the velocity vector inclination angle) in the vicinity of the reflection point is presented. It is shown that a reflected weak discontinuity is outgoing from the reflection point. The obtained solution has a logarithmic singularity of the first derivatives of the gasdynamic parameters with respect to the polar angle in the meridional plane in the vicinity of the reflected weak discontinuity.

Keywords: weak discontinuity, supersonic axisymmetric flow, reflection from and transmission through the axis of symmetry.

Bibliogr. 8 references. Fig. 3.

UDK 524.4

Vityazev V. V., Tsvetkov A. S. **Stellar kinematics from proper motions of the zonal catalogues** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 128–136.

We present the complete system of vector spherical functions orthogonal on the points of a sphere between two declination circles. With the help of these functions the method of kinematic analysis of the proper motions is proposed for the zonal catalogues. The beneficial properties of the spherical decomposition approach over the least squares estimation of certain kinematic parameters of the model is shown. The new method was tested numerically with the aim of its application to the stars of the southern equatorial hemisphere of the Tycho-2 catalogue.

Keywords: vector spherical functions, stellar kinematics.

Bibliogr. 14 references. Tabl. 1.

UDK 524.7-327

Stepanova K. V. **Rotation curves taking the projection effect and the non-zero thickness slit of a spectrograph into account** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2012. Issue 1. P. 137–146.

We analyze the influence of the projection effect on the observed rotation curves of galaxies with disks located at an arbitrary angle to the line of sight. We take the finite width of the spectrograph slit into account. We study this effect for a slit of non-zero thickness for different angles and distances to galaxies

Keywords: kinematics of galaxies, rotation curves, projection effect.

Bibliogr. 5 references. Fig. 6.

CONTENTS

Mathematics

<i>Daugavet I. K.</i> On a class of numerical methods for solving stiff systems of differential equations	3
<i>Vidyaeva K. O., Ermakov S. M.</i> Spectrum assessment of linear operators	11
<i>Zviagintseva T. E.</i> Coefficient criteria on the existence of limit cycles in two-dimensional systems with hysteresis	18
<i>Zuber I. E.</i> Stabilization of discrete-time systems by dynamic control	27
<i>Krasulina T. P.</i> On the convergence from below of the Robbins—Monro process for small steps	31
<i>Krylov W. A.</i> Periodic solutions of a class of functional differential equations	35
<i>Loginova E. A.</i> Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack	40
<i>Pakhnusheva M. Yu.</i> Investigation of the features of moment invariants in image processing	48
<i>Sipin A. S.</i> Simulation methods for second-order parabolic Cauchy problem. “Conjugate” scheme	57
<i>Smirnov S. I.</i> Stochastic version of the degenerate kernel method for large systems of linear equations	68

Mechanics

<i>Arutyunyan A. R., Arutyunyan R. A.</i> Formulation of the strength criterion of a nonlinear elastic medium with a crack	73
<i>Bauer S. M., Voronkova E. B., Romanova A. A.</i> On the unsymmetric buckling of circular plates under normal pressure	80
<i>Kustova E. V., Mekhonoshina M. A.</i> Relaxation pressure in an $N_2 - N$ mixture with non-equilibrium dissociation reaction	86
<i>Morozov V. A., Shipilov S. S.</i> Modeling high dispersed particles scattering at an electric explosion of conductors	96
<i>Morshina D. A.</i> Stress state and strength of intraocular lenses (theory and experiment)	102
<i>Tovstik P. E., Shekhovtsov A. S., Shekhovtsov V. A.</i> Marine stationary platform under the action of ice loading	107
<i>Mostovyykh P. S., Uskov V. N.</i> Reflection of a weak discontinuity from an axis of symmetry in a uniform flow	117

Astronomy

<i>Vityazev V. V., Tsvetkov A. S.</i> Stellar kinematics from proper motions of the zonal catalogues	128
<i>Stepanova K. V.</i> Rotation curves taking the projection effect and the non-zero thickness slit of a spectrograph into account	137

Chronicle

Sessions of Section of the House of scientists of the Russian Academy of Sciences on the theoretical mechanics of prof. N. N. Poljakhov	
October 27, 2010	85
February 16, 2011	116

Abstracts	154
------------------	-----