

В Е С Т Н И К

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 10
Выпуск 3

2013
Сентябрь

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
ИНФОРМАТИКА
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. ИЗДАЕТСЯ С АВГУСТА 1946 ГОДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Аббасов М. Э.</i> Условия экстремума в терминах обобщенных несобственных экзостеров.....	3
<i>Андерсен А. А., Чистяков С. В.</i> Методологические основы разработки интерактивной системы построения шкалы ставок подоходного налога.	9
<i>Балыкина Ю. Е., Колпак Е. П.</i> Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы.	20
<i>Буре В. М., Сергеева А. А.</i> Метод определения равновесия при условии штрафных санкций за задержку в обслуживании на строительном рынке.....	32
<i>Волкова А. С.</i> Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе.....	39
<i>Демьянов В. Ф., Долгополик М. В.</i> Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления.	48
<i>Демьянович Ю. К., Дронь В. О., Иванцова О. Н.</i> Об аппроксимации B_φ -сплайнами.	67
<i>Костюнин С. Ю., Палестини А., Шевкопляс Е. В.</i> Об одной дифференциальной игре, моделирующей разработку невозобновляемого ресурса.	73
<i>Мальков В. М., Малькова Ю. В.</i> Плоские задачи о сосредоточенных силах для полуплоскостного материала.....	83
<i>Надымов Е. Н.</i> Расчет присоединенных масс с помощью каплевидных осесимметричных тел.	97



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ
1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

© Авторы статей, 2013

© Издательство
Санкт-Петербургского университета, 2013

<i>Norkin V. I., Wets R. J.-B.</i> On a strong graphical law of large numbers for random semicontinuous mappings.	102
<i>Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А.</i> Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе.	112
<i>Yeung D. W. K.</i> Optimal consumption under an uncertain inter-temporal budget: stochastic dynamic Slutsky equations.	121

ИНФОРМАТИКА

<i>Гордеев Д. Ф.</i> Моделирование и расчет дозного распределения в тканеэквивалентной среде.	142
<i>Климаков А. А.</i> Моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом распределения пространственного заряда.	150

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

<i>Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д.</i> Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрогодействия.	157
<i>Якушев В. П., Карелин В. В., Буре В. М.</i> Байесовский подход в задаче управления кислотностью среды.	168

ОБЗОРЫ И РЕЦЕНЗИИ

<i>Батаронов И. Л., Провоторов В. В. – А. Ю. Александров, А. В. Платонов.</i> Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем.	180
<i>Жабко А. П. – В. В. Провоторов.</i> Собственные функции краевых задач на графах и приложения.	181

ХРОНИКА

<i>Веремей Е. И., Демьянов В. Ф., Дривотин О. И., Егоров Н. В., Жабко А. П., Камачкин А. М., Карелин В. В., Мышков С. А., Петросян Л. А., Полякова Л. Н., Шамберов В. Н., Чистяков С. В. Р. А. Нелепин (к 85-летию со дня рождения).</i>	183
---	-----

АННОТАЦИИ	185
-----------------	-----

ABSTRACTS	191
-----------------	-----

ОТ РЕДАКЦИИ.....	197
------------------	-----

CONTENTS	198
----------------	-----

АННОТАЦИИ

УДК 519.3+519.7

Аббасов М. Э. **Условия экстремума в терминах обобщенных несобственных экзостеров** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 3–8.

Понятие экзостеров родилось из работ Б. Н. Пшеничного, А. М. Рубинова, В. Ф. Демьянова, посвященных исследованию невыпуклых функций. С помощью этих инструментов оказалось возможно описывать условия экстремума, строить направления спуска и подъема. Введение обобщенных экзостеров позволило расширить класс рассматриваемых функций. В настоящей работе предпринимается попытка получения условий минимума в терминах нижнего обобщенного экзостера и условий максимума в терминах верхнего обобщенного экзостера. Полученные результаты иллюстрируются на примерах. Библиогр. 11 назв.

Ключевые слова: негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, обобщенные несобственные экзостеры, экстремум, строгий экстремум, необходимые и достаточные условия.

УДК 519.865.7:004.942

Андерсен А. А., Чистяков С. В. **Методологические основы разработки интерактивной системы построения шкалы ставок подоходного налога** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 9–19.

Излагаются методологические основы разработки интерактивной системы выбора прогрессивной шкалы ставок подоходного налога и кратко описывается первая версия такой системы. Она базируется на разработанной ранее одним из авторов вариационной (теоретико-игровой) модели выбора налоговой шкалы. Предложенный вариант позволяет пользователю осуществлять корректный ввод пяти входных параметров используемой модели, а также корректировать их, информируя его о допустимом интервале изменения вводимого или корректируемого параметра, а в случае коррекции параметров предоставляя также графическую и табличную информацию (практически с любой степенью ее детализации) о выбранной ранее шкале средних ставок налога. Библиогр. 13 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: подоходный налог, прогрессивная шкала, интерактивная система, методологические основы.

УДК 57-1

Балыкина Ю. Е., Колпак Е. П. **Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 20–31.

Предлагаются четыре математические модели функционирования фолликула щитовидной железы. В двух моделях фолликул рассматривается как точечная система, а в двух – как система с распределенными параметрами. Учитываются основные биохимические реакции: поступление йода в фолликул, образование тиреоглобулина и гормона тироксина. Модели формируются на основе принципа парных взаимодействий и представляют собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений или краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В точечных моделях производится анализ устойчивости стационарных точек, а в диффузионных – устойчивости и тривиальных решений. Предложен численный алгоритм решения нелинейных краевых задач. На основании численных экспериментов дана оценка влияния скоростей различных реакций на выход тиреоидного гормона. Библиогр. 21 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, численные методы, щитовидная железа.

УДК 519.2

Буре В. М., Сергеева А. А. **Метод определения равновесия при условии штрафных санкций за задержку в обслуживании на строительном рынке** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 32–38.

Рассматривается строительный рынок ремонтно-отделочных работ, на котором действуют три фирмы подрядчика. Клиентами на рынке являются строительные компании, выбирающие подрядчика для выполнения работ, стараясь минимизировать общие затраты на обслуживание. Важная особенность задачи – возможность клиента понести большие издержки, если длительность выполнения работ превышает определенный заданный заранее предел. Каждый подрядчик устанавливает собственную политику формирования конечной стоимости заказа. Издержки клиентов складываются из фиксированной и временной составляющих. В работе найдено оптимальное поведение клиентов при выборе фирмы-подрядчика в терминах полностью смешанных стратегий. Для решения задачи применен теоретико-игровой и вероятностный подход. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: вероятностное и теоретико-игровое моделирование, строительный рынок ремонтно-отделочных работ, нелинейные штрафы, игра n лиц, равновесие по Нэшу, оптимальное поведение клиента, полностью смешанные стратегии.

УДК 517.954

Волкова А. С. **Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 39–47.

Рассматриваются обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на произвольном графе, строятся аналоги соответствующих соболевских пространств, являющиеся плотными множествами в пространстве функций с суммируемым квадратом, доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи, представлен алгоритм определения граничного управления в задаче перевода дифференциальной системы из начального состояния в заданное финальное состояние. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: краевая задача на графе, обобщенные решения, теорема об однозначной разрешимости, граничное управление.

УДК 517.9

Демьянов В. Ф., Долгополик М. В. **Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 48–66.

В статье понятие кодифференциала обобщается на случай абстрактных пространств. Строится исчисление кодифференциалов, получены необходимые условия экстремума кодифференцируемой функции, определенной на нормированном пространстве, предложен метод нахождения стационарных точек функционала – метод кодифференциального спуска, доказана теорема о сходимости метода. Эффективность описанной теории демонстрируется на примере некоторых задач вариационного исчисления. Библиогр. 17 назв.

Ключевые слова: негладкий анализ, кодифференцируемые функции, метод кодифференциального спуска, штрафные функции, вариационное исчисление.

УДК 519

Демьянович Ю. К., Дронь В. О., Иванцова О. Н. **Об аппроксимации B_φ -сплайнами** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 67–72.

Рассматриваются оценки приближения функции $u \in C^2(\alpha, \beta)$ с помощью биортогональной B_φ -сплайновой аппроксимации \tilde{u} первого порядка в неполиномиальном случае. Сплайновая сетка $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ бесконечна и определена на интервале (α, β) так, что $\lim_{j \rightarrow -\infty} x_j = \alpha$,

$\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = \beta$. Координатные B_φ -сплайны получаются из аппроксимационных соотношений с помощью порождающей вектор-функции $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)^T$, абсолютная величина вронскиана компонент которой не меньше некоторой константы $c > 0$. Применен метод интегрального представления остатка; последний существенно отличается от метода подобия, обычно используемого в случае полиномиальных сплайнов. В результате получены оценки приближения функции u и ее производных, а именно норма $\|u^{(i)} - \tilde{u}^{(i)}\|_{C[x_k, x_{k+1}]}$ оценивается произведением выражения $2c^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{2-i}$ на выражение

$$\sup_{\xi, \eta \in [x_k, x_{k+1}]} |\det(\Phi(x_k), \Phi'(\xi), \Phi''(\eta))|,$$

где $\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), u(t))^T$, $i = 0, 1, 2$. Эти оценки точны на компонентах порождающей вектор-функции φ . При $x_{k+1} - x_k \rightarrow 0$ написанный определитель стремится к линейному дифференциальному оператору второго порядка над функцией u , для которого фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения являются компоненты вектор-функции $\varphi(t)$. Библиогр. 3 назв..

Ключевые слова: сплайны, биортогональные системы, остаток аппроксимации.

УДК 517.977.8+517.977.5

Костюнин С. Ю., Палестини А., Шевкопляс Е. В. **Об одной дифференциальной игре, моделирующей разработку невозобновляемого ресурса** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 73–82.

В статье рассматривается дифференциальная игра двух лиц со случайной продолжительностью, моделирующая совместную разработку невозобновляемого ресурса. Время выхода игроков из игры задается независимыми случайными величинами. Игрок, остающийся в игре после выхода соперника, продолжает разработку ресурса. Получен ожидаемый выигрыш игрока в виде стандартного интегрального функционала для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью. В формальном виде выводится уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Рассматривается пример игры с линейной динамикой и логарифмической функцией полезности. В этом случае получено решение в виде позиционных стратегий. Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: дифференциальные игры, разработка невозобновляемых ресурсов, случайная продолжительность, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

УДК 539.3+517.5

Мальков В. М., Малькова Ю. В. **Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 83–96.

Рассмотрены плоские задачи нелинейной упругости (плоская деформация и плоское напряженное состояние) для плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенных сил. Механические свойства описываются моделью полулинейного материала. Использование модели гармонического материала позволило применить методы теории комплексных функций и получить точные аналитические глобальные решения задач, в том числе сосредоточенная сила на границе раздела материалов двухкомпонентной плоскости и сосредоточенная сила на границе полуплоскости (задачи Фламана и Мичела). Из глобальных решений построена асимптотика напряжений и деформаций в окрестности точки приложения силы. Библиогр. 10 назв.

Ключевые слова: плоские задачи, полулинейный материал, метод комплексных функций, сосредоточенные силы, асимптотические разложения.

УДК 629.12.035

Надымов Е. Н. **Расчет присоединенных масс с помощью каплевидных осесимметричных тел** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 97–101.

Излагаются основные аспекты расчета присоединенных масс каплевидных осесимметричных тел. Описываются способы их вычисления с помощью метода плоских сечений и метода решения уравнения Лапласа в эллиптических координатах. Данные методы сопоставляются между собой и приводятся результаты расчетов коэффициентов присоединенных масс, вычисленных различными способами. Кроме того, описывается метод подбора эквивалентного каплевидного тела и определения коэффициентов в уравнениях образующих. Приводится пример для схематической модели корпуса подводного аппарата. В конце работы помещены таблицы с результатами вычислений присоединенных масс каплевидных тел для различных наборов коэффициентов в уравнениях их образующих. Библиогр. 5 назв. Табл. 3. Ил. 3.

Ключевые слова: жидкость, тело вращения, присоединенные массы, модель, течение.

УДК 519.214

Norkin V. I., Wets R. J.-B. **On a strong graphical law of large numbers for random semicontinuous mappings** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 102–111.

In the paper we establish a strong graphical law of large numbers (LLN) for random outer semicontinuous mappings, providing conditions when graphs of sample average mappings converge to the graph of the expectation mapping with probability one. This result extends a known LLN for compact valued random sets to random uniformly bounded (by an integrable function) set valued mappings. We give also an equivalent formulation for the graphical LLN by means of some fattened mappings. The study is motivated by applications of the set convergence and the graphical LLN in stochastic variational analysis, including approximation and solution of stochastic generalized equations, stochastic variational inequalities and stochastic optimization problems. The nature of these applications consists in sample average approximation of the inclusion mappings, application of the graphical LLN and obtaining from here a graphical approximation of the set of solutions. Bibliogr. 23.

Ключевые слова: random sets, random set-valued mappings, strong law of large numbers, graphical convergence.

УДК 517.958

Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А. **Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 112–120.

Исследована задача граничного управления колебаниями на графе (сети) в классе функций, суммируемых с квадратом и имеющих обобщенные производные первого порядка, которые также суммируются с квадратом. Полученные результаты являются основополагающими и при изучении процессов метаболизма клеток, проходящих на множестве метаболических цепей, в совокупности представляющих собой сеть. На примере модельной задачи на графе-звезде обосновывается существование граничных управляющих воздействий в задаче перевода волновой системы из начального состояния в заданное финальное состояние, представлен метод их нахождения. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: волновое уравнение на графе, краевая задача, однозначная разрешимость, граничное управление.

УДК 517.929

Yeung D. W. K. **Optimal consumption under an uncertain inter-temporal budget: stochastic dynamic Slutsky equations** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 121–141.

This paper extends Slutsky's classic work on consumer theory to a stochastic dynamic framework in which the consumer has an inter-temporal planning horizon with uncertain future incomes. Utility maximization leading to a set of ordinary wealth-dependent demand functions is performed. A dual problem is set up to derive the wealth compensated demand functions. This represents the first time that wealth-dependent ordinary demand functions and wealth compensated demand functions are obtained. A set of stochastic dynamic Slutsky equations is then derived. The extension incorporates realistic characteristics in consumer theory and advances the conventional static microeconomic study on consumption to a stochastic dynamic optimal control framework. Bibliogr. 17. П. 2. Table 2.

Ключевые слова: al consumption, uncertain inter-temporal budget, stochastic dynamic programming, slutsky equation.

УДК 61:539.1.03

Гордеев Д. Ф. **Моделирование и расчет дозного распределения в тканеэквивалентной среде** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 142–149.

Предложена модель радиационного поля медицинского линейного ускорителя в тканеэквивалентной среде. Отличительной особенностью данной модели является представление терапевтического пучка в виде набора карандашных пучков, которое позволяет производить расчет дозного распределения для радиационного поля произвольной формы. Дано описание метода расчета и его программной реализации, основанных на разработанной модели. Библиогр. 13 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: система планирования лучевой терапии, дозное распределение, интенсивно-модулированная радиотерапия.

УДК 533+537

Климаков А. А. **Моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом распределения пространственного заряда** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 150–156.

Представлено моделирование электронно-оптической системы с учетом влияния объемного заряда на полевую электронную эмиссию. Рассматривается система с полевым острием с радиусом кривизны на вершине, составляющем 5 нм, и системой косоугольных фокусирующих линз. Ставится задача расчета тока системы и радиуса раствора пучка электронов на аноде. Для нахождения распределения электростатического потенциала решается уравнение Пуассона с помощью метода конечных элементов. Катод разбивается на участки, для каждого участка рассчитывается ток системы с помощью соотношения Фаулера–Нордгейма. По значению тока вычисляется плотность потоков пучков электронов, эмитированных с катода. Рассчитываются траектории пучков электронов, определяется плотность распределения объемного заряда. Для учета влияния объемного заряда на полевую эмиссию применяется метод итераций. Для каждой из итераций системы было определено распределение объемного заряда, которое использовалось для решения уравнения Пуассона на следующей итерации. Сравнение полученного распределения потенциала с учетом и без учета объемного заряда показывает, что объемный заряд вызывает сильное уменьшение тока системы. Библиогр. 13 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: полевая эмиссия, холодная эмиссия электронов, объемный заряд, фокусирующие косоугольные линзы, уравнения Пуассона, Фаулера–Нордгейма.

УДК 517.977.58

Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д. **Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрогодействия** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 157–167.

Приводятся численные и аналитические алгоритмы приближенного решения задач оптимального управления, использующие конструкции выпуклого и негладкого анализа. Для задачи быстрогодействия с круговой вектограммой скоростей предлагаются алгоритмы приближенного построения функции оптимального результата, базирующиеся на понятии множества симметрии. Изучены свойства гладкости данных множеств, выписано уравнение касательной в их регулярных точках. Показано приложение полученных результатов для численного построения обобщенных (минимаксных) решений краевых задач Дирихле для уравнений в частных производных гамильтонова типа. Приведены примеры решения задач быстрогодействия. Библиогр. 23 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, сингулярная кривая, касательная, негладкость.

УДК 539. 75

Якушев В. П., Карелин В. В., Буре В. М. **Байесовский подход в задаче управления кислотностью среды** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 3. С. 168–179.

В статье рассматривается один из подходов в задаче управления кислотностью почвы. Известкование почв представляет собой высокоэффективный прием повышения плодородия. Главная цель известкования – устранение избыточной кислотности среды. Темп увеличения кислотности почвы (снижения показателя рН) зависит от уровня реакции среды. Обычно исследуют среднегодовое увеличение кислотности почвы. В связи со сказанным представляется возможным в качестве некоторого приближения описывать динамику снижения показателя рН случайным управляемым процессом. В предположении, что переходная функция этого процесса зависит от неизвестного параметра θ , приходим к задаче синтеза оптимальных стратегий для динамических систем, в которых отсутствует часть основной информации, необходимой для построения оптимального управления. Предложена процедура синтеза оптимальных стратегий, опирающихся на рекуррентный метод вычисления условных плотностей. Для проверки алгоритмов адаптации разработан способ моделирования случайного процесса, основанный на известном методе Монте-Карло. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: кислотность, случайный процесс, оптимальные стратегии.

ABSTRACTS

Abbasov M. E. **Extremum conditions in terms of generalized adjoint exhausters** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 3–8.

Abbasov Majid Elhan ogli – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: abbasov.majid@gmail.com.

The notion of exhauster from the works of B. N. Pshenichny, V. F. Demyanov, A. M. Rubinov devoted to the study of nonconvex functions. By means of these tools one can describe the optimality conditions, build the direction of descent and ascent. The introduction of generalized exhausters allowed to expand the class of functions under consideration. In the present work an attempts is made to get the minimum conditions in terms of generalized lower exhausters and conditions of the maximum in terms of generalized upper exhausters. The results are illustrated by examples. Bibliogr. 11.

Key words: nonsmooth analysis, nondifferentiable optimization, adjoint generalized exhausters, extremum, strict extremum, necessary and sufficient conditions.

Andersen A. A., Chistiakov S. V. **Methodological aspects of development an interactive software for producing income tax rate schedules** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 9–19.

Andersen Anton Andreevich – post-graduate student, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: anton.a.andersen@gmail.com.

Chistiakov Sergei Vladimirovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: svch50@mail.ru.

Methodological framework of development an interactive software for producing income tax rate schedules is given and its first version is introduced. Software is based on the previously proposed by one of the authors variational (game-theoretical) model of income tax rate schedules production. The software allows the user to realize all external parameters and to alter them accordingly to the introduced model. It displays permissible ranges for all parameters during user interaction. The software also calculates average income tax rates and presents them in the graphical or in the tabular form (with almost any level of its specification). Bibliogr. 13. Il. 2.

Key words: income tax, progressive tax, rate schedule, interactive software, methodological framework.

Balykina Yu. E., Kolpak E. P. **Mathematical models of thyroid follicle functioning** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 20–31.

Balykina Yulia Efimovna – senior lecturer, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: julia.balykina@gmail.com.

Kolpak Eugene Petrovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: petrovich_pmpu@mail.ru.

Four mathematical models of thyroid follicle functioning are suggested. Two models view the follicle as a point system, and the other two – as a system with distributed parameters. The main biochemical reactions – iodine intake in the follicle and the formation of thyroglobulin and hormone thyroxine - are taken into consideration. The models are formed on the principle of pair interactions and represent a Cauchy problem for a system of ordinary differential equations or a boundary value problem for a system of nonlinear differential equations in partial derivatives. The stability analysis of stationary points is performed in the point models, and in the diffusion models – the robustness of the trivial solution. A numerical algorithm for solving a nonlinear boundary value problems is suggested. Based on the numerical experiments, the effect of the rates of different reactions on the hormonal secretion rate is evaluated. Bibliogr. 21. Il. 7.

Key words: mathematical modeling, differential equations, numerical methods, thyroid gland.

Bure V. M., Sergeeva A. A. **Algorithm for determining equilibrium provided penalties for delay in the construction market** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 32–38.

Bure Vladimir Mansurovich – doctor of engineering sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vlb310154@gmail.com.

Sergeeva Anna Aleksanrovna – post-student, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: sergeeva_a_a@mail.ru.

The construction market with three company contractors is considered. Customers in the market are construction companies. They select a contractor to perform the work trying to minimize the total cost of service. Two providers are service companies in the construction market which provide repairs and cosmetic finishing works for clients. Each of provider has its own scheme of customer order fulfillment and own cost policy. An important feature of the problem is the possibility of the client to incur heavy costs if the duration of work exceeds a certain pre-defined limit. We consider the optimal choice of the client in terms of cost minimization. Costs consist of direct client costs orders for the scheme which is set by the provider specific losses and penalties which are charged to the client for delay in work delivery. In this case under penalty extra money is meant that is paid to the contractor if the nature of the work is too difficult. Each contractor shall determine its own policy formation of the final price. Costs consist of fixed clients and temporary component. There is introduced the class of fully-mixed strategies. The theorem which determine points of Nash equilibrium under three possible cases is formulated and proved. The optimal behavior of customers in terms of fully-mixed strategies is found. Bibliogr. 5.

Key words: probability modeling, game-theoretical approach, construction market, big penalties, nonlinear penalty, n -person game, Nash equilibrium, fully-mixed strategies.

Volkova A. S. **Generalized solutions of a boundary value problem for thermal conductivity equation on a graph** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 39–47.

Volkova Anna Sergeevna – post-graduate student, Voronezh State University, Voronezh 394036, Russian Federation; e-mail: volan100@mail.ru.

Generalized solutions of a boundary value problem for thermal conductivity equation on an arbitrary graph are considered. Analogues of corresponding Sobolev spaces which are dense sets in the space of square-integrable functions are constructed. The theorem of unique solvability of a boundary-value problem is proved. The algorithm of determining boundary control in the problem of translating a differential system from the initial state to the desired final one is presented. Bibliogr. 4.

Key words: boundary value problem on a graph, generalized solutions, a theorem on unique solvability, boundary control.

Demyanov V. F., Dolgopolik M. V. **Codifferentiable functions in Banach spaces: methods and applications to problems of variation calculus** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 48–66.

Demyanov Vladimir Fedorovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vfd@ad9503.spb.edu.

Dolgopolik Maxim Vladimirovich – post-graduate student, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: maxim.dolgopolik@gmail.com.

For the study of special classes of nonsmooth functions, specific tools and methods are usually employed. Thus, for the class of qusidifferentiable functions, such a tool is Quasidifferential Calculus. The notion of codifferential allows one to construct continuous approximations of nonsmooth functions. This approach is investigated in detail for the finite-dimensional case. In the present paper, the notion of codifferential is generalized to the case of abstract spaces. Calculus of codifferentials

is constructed, necessary conditions for an extremum of a codifferentiable function defined on a normed space are formulated, a numerical method for finding stationary points of the functional (the method of codifferential descent) is derived, a convergence theorem is proved. The efficiency of the theory described is demonstrated on some problems of Calculus of Variations. By means of the notion of codifferential, all known optimality conditions for classical variational problems were almost automatically obtained as well as necessary conditions for a minmax variational problem. Bibliogr. 17.

Key words: nonsmooth analysis, codifferentiable function, method of codifferential descent, penalty function, calculus of variations.

Demjanovich Yu. K., Dron V. O., Ivantsova O. N. **On B_φ -spline approximation** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 67–72.

Demjanovich Yuri Kazimirovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: yuri.demjanovich@gmail.com.

Dron Vera Olegovna – post-student, teaching assistant, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vera.dron@gmail.com.

Ivantsova Olga Nikolaevna – candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: ivantsova@front.ru.

Evaluations of approach for function $u \in C^2(\alpha, \beta)$ with biorthogonal non-polynomial B_φ -spline approximation \tilde{u} of the first order are discussed. Spline grid $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ is defined on an interval (α, β) such that $\lim_{j \rightarrow -\infty} x_j = \alpha$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = \beta$. Coordinate B_φ -splines are obtained by approximation relations with generating vector-function $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)^T$ under condition that absolute value of Wronskian for the functions φ_0, φ_1 isn't less than $c > 0$. The method of integral representation of residual is applied; the last one differs from method of similarity, which is implicated in the case of polynomial splines. As a result the evaluations of norms $\|u^{(i)} - \tilde{u}^{(i)}\|_{C[x_k, x_{k+1}]}$ are obtained by product of $2c^{-1}(x_{k+1} - x_k)^{2-i}$ and

$$\sup_{\xi, \eta \in [x_k, x_{k+1}]} |\det(\Phi(x_k), \Phi'(\xi), \Phi''(\eta))|;$$

here $\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), u(t))^T$, $i = 0, 1, 2$. The evaluations are exact for components of generating vector-functions φ . If $x_{k+1} - x_k \rightarrow 0$ then the determinant tends to the linear differential operator of the second order over function u , where fundamental solutions of the differential equation with mentioned operator and zero right part are functions $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$. Bibliogr. 3.

Key words: splines, biorthogonal systems, residual of approximation.

Kostyunin S. Yu., Palestini A., Shevkoplyas E. V. **On a exhaustible resource extraction differential game with random terminal instants** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 73–82.

Kostyunin Sergey Yurievich – post-graduate student, assistant, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: kostyunin.sergey@gmail.com.

Palestini Arsen – assistant professor, MEMOTEF, University of Rome “La Sapienza”, Rome 00161, Italy; e-mail: arsen.palestini@uniroma1.it.

Shevkoplyas Ekaterina Viktorovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: ekaterina.shevkoplyas@gmail.com.

We investigate a noncooperative differential game in which two firms compete in extracting a unique nonrenewable resource over time. The respective times of extraction are random and after the first firm finishes extraction, the remaining one continues and gets the final reward for winning. The expected payoffs for each player are obtained in the standard form for the differential games. The Hamilton–Jacobi–Bellman equations for the feedback information structure are determined. An example is introduced where the optimal feedback strategy, i. e. the optimal extraction rate, is calculated in a closed form. Bibliogr. 12.

Key words: differential game, exhaustible resources, random terminal time, Hamilton–Jacobi–Bellman equation.

Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. **Plane problems of concentrated forces for half-linear material** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 83–96.

Mal'kov Veniamin Mikhailovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vmmalkov@apmath.spbu.ru.

Mal'kova Ylia Veniaminovna – candidate of physical and mathematical sciences, docent, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: jmalkova@list.ru.

The plane problems of nonlinear elasticity (the plane strains and the plane stresses) are considered for a plane and a half-plane under the action of concentrated forces. Mechanical properties are described by a half-linear material model. Using a harmonious material model has allowed to apply the methods of theory complex functions and receive exact analytical global solutions of problems, including: concentrated force on the interface of materials of a two-componential plane and concentrated force on the border of a half-plane (problems of Flamant and Michel). From global solutions asymptotic stresses and displacements in a vicinity of a force application point are constructed. The comparison of the results obtained with the solutions of Flamant and Michel linear problems has shown that stresses and displacements have identical singularities in a vicinity of a force application point - $1/r$, displacements have logarithmic singularity - $\ln r$. At the same time there are also principal differences: in linear problems only radial stresses are distinct from zero, and in nonlinear and shear stresses they are not equal to zero. Besides, factors at singular members in nonlinear and linear problems are different. Bibliogr. 10.

Key words: plane problems, concentrated force, half-linear material, complex functions method, asymptotic series.

Nadymov E. N. **Calculation of additional masses with drop-shaped axisymmetric bodies** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 97–101.

Nadymov Evgeny Nikolaevich – post-graduate student, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: johnnympu@gmail.com.

Algorithms of calculation of drop-shaped axisymmetric bodies additional masses are presented. Methods of their calculation by means of a plane section method and the method of Laplace equation solution in elliptic coordinates are described. These methods are compared with each other and the results of calculation of additional masses coefficients counted in a variety of ways are given. The trial-and-error method of an equivalent drop-shaped body and the method for determination of coefficients in generating line equations are also described. The example for a schematic model of an underwater vehicle hull is given. Tables with the results of calculations of drop-shaped bodies additional masses for different sets of coefficients in the equations of their generating lines are shown. Bibliogr. 5. Il. 3. Tabl. 3.

Key words: liquid, body of revolution, added masses, model, flow.

Norkin V. I., Wets R.J.-B. **On a strong graphical law of large numbers for random semicontinuous mappings** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 102–111.

Norkin Vladimir Ivanovich – doctor of physical and mathematical sciences, leading scientific researcher, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev 03187, Ukraine; e-mail: norkin@i.com.ua.

Wets Roger J.-B. – distinguished research professor of mathematics, Ph. D. engineering sciences, Department of Mathematics, University of California, Davis CA 95616-5270, USA; e-mail: rjbwets@ucdavis.edu.

In the paper we establish a strong graphical law of large numbers (LLN) for random outer semicontinuous mappings, providing conditions when graphs of sample average mappings converge to the graph of the expectation mapping with probability one. This result extends a known LLN for

compact valued random sets to random uniformly bounded (by an integrable function) set valued mappings. We give also an equivalent formulation for the graphical LLN by means of some fattened mappings. The study is motivated by applications of the set convergence and the graphical LLN in stochastic variational analysis, including approximation and solution of stochastic generalized equations, stochastic variational inequalities and stochastic optimization problems. The nature of these applications consists in sample average approximation of the inclusion mappings, application of the graphical LLN and obtaining from here a graphical approximation of the set of solutions. Bibliogr. 23.

Key words: random sets, random set-valued mappings, strong law of large numbers, graphical convergence.

Provotorov V. V., Gnilit'skaya Yu. A. **Boundary control of wave system in the space of generalized solutions on a graph** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 112–120.

Provotorov Viacheslav Vasilievich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Voronezky State University, Voronez 394036, Russian Federation; e-mail: wwprov@mail.ru.

Gnilit'skaya Yulia Aleksandrovna – magister, Voronezky State University, Voronez 394036, Russian Federation; e-mail: uliya_al@mail.ru.

A boundary value problem for the wave equation on an arbitrary geometrical graph is considered. To analyze this problem a spectral technique is used (Fourier analysis): the difficulties are generated by the geometry of the graph which can be relatively easily overcome especially in the case where the graph contains cycles. On the other hand, the possibility of expansion in generalized eigenfunctions of the corresponding boundary value problem is effectively used in the proofs of existence theorems by the methods represented in the known works of S. L. Sobolev, O. A. Ladyzhenskaya, V. I. Smirnov. On the example of a model problem on a star-graph the existence of boundary control actions is substantiated and the method for finding them is presented. To simplify the above formulas the length of edges is multiple π , the wave equation is used in its simplest form: $u_{tt} = u_{xx}$. The main results of the work are presented as formulas that determine unknown boundary control as a function of time. Bibliogr. 5.

Key words: wave equation on a graph, boundary problem, unique solvability, boundary control.

Yeung D. W. K. **Optimal consumption under an uncertain inter-temporal budget: stochastic dynamic Slutsky equations** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 121–141.

Yeung David W. K. – professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; SRS Consortium for advanced Study in Cooperative Dynamic Games, Shue Yan University, Hong Kong, China; e-mail: dwkyeung@hksyu.edu.

This paper extends Slutsky's classic work on consumer theory to a stochastic dynamic framework in which the consumer has an inter-temporal planning horizon with uncertain future incomes. Utility maximization leading to a set of ordinary wealth-dependent demand functions is performed. A dual problem is set up to derive the wealth compensated demand functions. This represents the first time that wealth-dependent ordinary demand functions and wealth compensated demand functions are obtained. A set of stochastic dynamic Slutsky equations is then derived. The extension incorporates realistic characteristics in consumer theory and advances the conventional static microeconomic study on consumption to a stochastic dynamic optimal control framework. Bibliogr. 17. II. 2. Table 2.

Key words: al consumption, uncertain inter-temporal budget, stochastic dynamic programming, slutsky equation.

Gordeev D. F. **Modelling and calculation of dose distribution in tissue-equivalent medium** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 142–149.

Gordeev Dmitry Fedorovich – post-graduate student, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: dima31415@gmail.com.

The model of a radiation field generated by medical linear accelerator in a tissue-equivalent medium is suggested. This model can be applied to radiation treatment planning. A distinctive feature of the model is representation of a therapeutic beam as a set of pencil beams. Such representation allows to calculate dose distribution for a radiation field of an arbitrary form. The method of calculation and software implementation, which are based on the suggested model, are described. Software presented consists of two parts: a module for processing dosimetric information and a module for dose distribution calculation. The purpose of a dosimetric module is initializing of model for a specific accelerator. After that initialization the model can be used in a calculation module. Bibliogr. 13. Il. 6.

Key words: radiation treatment planning system, dose distribution, intensity-modulated radiation therapy.

Klimakov A. A. Modeling an electron gun with a focusing lens system with regard for space charge distribution // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 150–156.

Klimakov Aleksei Andreevich – post-graduate, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: karamazv@rambler.ru.

The article focuses on modeling an electron-optical system taking into account the influence of space charge on the electron field emission. During the process of electron gun working around the edge the space charge is formed which can have strong influence on the emission of electrons. For such systems one of the main difficulties for the numerical calculation is that the radius of curvature at the edge of the cathode is different from the other elements by several orders. The system contains the field tip with the radius of curvature equal to 5 nm and the system of oblique focusing lenses with oblique angle 40° . Poisson equation is used to solve the problem using a finite element method, Fowler–Nordheim relation helps to calculate the current, electron trajectories are calculated, the method of iterations helps to evaluate the influence of the space-charge. The impact of space charge on the current and on the electron scattering radius is evaluated. Bibliogr. 13. Il. 8.

Key words: field emission, cold electron emission, space charges, oblique focusing lenses, Poisson equation, Fowler–Nordheim.

Ushakov V. N., Uspenskiy A. A., Lebedev P. D. Geometry of singular curves for one class of velocity // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 157–167.

Ushakov Vladimir Nikolaevich – doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the RAS, Institute of mathematics and mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of sciences, Ekaterinburg 620990, Russian Federation; e-mail: ushak@imm.uran.ru.

Uspenskiy Alexandr Alexandrovich – candidate of physical and mathematical sciences, senior research worker, Institute of mathematics and mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of sciences, Ekaterinburg 620990, Russian Federation; e-mail: uspen@imm.uran.ru.

Lebedev Pavel Dmitrievich – candidate of physical and mathematical sciences, research worker, Institute of mathematics and mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of sciences, Ekaterinburg 620990, Russian Federation; e-mail: pleb@yandex.ru.

Both numerical and analytical algorithms for approximate solutions of differential games and control problems are proposed using convex and nonsmooth analyze methods. Algorithms of optimal result function calculation in the velocity problem with circle vectogramme are considered. These algorithms are based on symmetry sets. Smooth properties of these sets are studied, the equation of tangent in their regular points are written. Application of the results investigated for numerical construction of generalized (minimax) solutions of Dirichlet boundary problems for Hamilton type PDE is suggested. The examples of velocity problems are calculated. Bibliogr. 23. Il. 5.

Key words: velocity problem, singular curve, tangent, nonsmoothness.

Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M. **Bayesian approach for soil acidity control** // Vestnik St. Petersburg University. Ser. 10. 2013. Issue 3. P. 168–179.

Yakushev Viktor Petrovich – academician of the RAAS, doctor of agricultural sciences, professor, director of the Agrophysical Research Institute, St. Petersburg 195220, Russian Federation; e-mail: office@agrophys.ru.
Karelin Vladimir Vitalievich – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vlkarelin@mail.ru.
Bure Vladimir Mansurovich – doctor of engineering sciences, professor, St. Petersburg State University, St. Petersburg 199034, Russian Federation; e-mail: vlb310154@gmail.com.

One of the approaches to the problem of controlling soil acidity is considered. Liming is a highly effective method of soil amelioration. The main purpose of liming is the elimination of excess acidity. The rate of soil acidity increasing (declining pH) depends on environment reaction. The average annual increase of soil acidity is usually studied. In this connection it is possible to describe the dynamics of decline in pH as a controlled stochastic process. Assuming that the transfer function of this process depends on the unknown parameter, we come to the problem of synthesis of optimal strategies for dynamical systems with the lack of information that is needed to build the optimal control. The procedure for synthesis of optimal strategies, based on a recursive method for calculating the conditional densities is suggested. To test the adaptation algorithms we propose a method for simulating a random process. Bibliogr. 9.

Key words: acidity, accidental process, optimal strategies.

ОТ РЕДАКЦИИ

Подробная информация о правилах предоставления статей и порядке их рецензирования приведена в выпусках журнала за 2009 г., в вып. 1 за 2010 г. и на сайте факультета прикладной математики–процессов управления СПбГУ (e-mail: vkarelin@apmath.spbu.ru).

CONTENTS

APPLIED MATHEMATICS

<i>Abbasov M. E.</i> Extremum conditions in terms of generalized adjoint exhausters.....	3
<i>Andersen A. A., Chistiakov S. V.</i> Methodological aspects of development an interactive software for producing income tax rate schedules	9
<i>Balykina Yu. E., Kolpak E. P.</i> Mathematical models of thyroid follicle functioning..	20
<i>Bure V. M., Sergeeva A. A.</i> Algorithm for determining equilibrium provided penalties for delay in the construction market	32
<i>Volkova A. S.</i> Generalized solutions of a boundary value problem for thermal conductivity equation on a graph	39
<i>Demyanov V. F., Dolgopolik M. V.</i> Codifferentiable functions in Banach spaces: methods and applications to problems of variation calculus	48
<i>Demjanovich Yu. K., Dron V. O., Ivantsova O. N.</i> On B_φ -spline approximation....	67
<i>Kostyunin S. Yu., Palestini A., Shevkoplyas E. V.</i> On a exhaustible resource extraction differential game with random terminal instants.....	73
<i>Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V.</i> Plane problems of concentrated forces for half-linear material	83
<i>Nadymov E. N.</i> Calculation of additional masses with drop-shaped axisymmetric bodies	97
<i>Norkin V. I., Wets R. J.-B.</i> On a strong graphical law of large numbers for random semicontinuous mappings.....	102
<i>Provotorov V. V., Gnilitskaya Yu. A.</i> Boundary control of wave system in the space of generalized solutions on a graph.....	112
<i>Yeung D. W. K.</i> Optimal consumption under an uncertain inter-temporal budget: stochastic dynamic Slutsky equations	121

INFORMATICS

<i>Gordeev D. F.</i> Modelling and calculation of dose distribution in tissue-equivalent medium	142
<i>Klimakov A. A.</i> Modeling an electron gun with a focusing lens system with regard for space charge distribution.....	150

CONTROL PROCESSES

<i>Ushakov V. N., Uspenskiy A. A., Lebedev P. D.</i> Geometry of singular curves for one class of velocity	157
<i>Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M.</i> Bayesian approach for soil acidity control	168

SURVEYS AND REVIEWS

<i>Bataronov I. A., Provotorov V. V.</i> – A. Yu. Aleksandrov, A. V. Platonov. Method of comparison and stability of nonlinear system motion.....	180
<i>Zhabko A. P.</i> – V. V. Provotorov. Eigenfunction of boundary value problems on graphs and applications.....	181

CHRONICLE

<i>Veremej E. I., Dem'janov V. F., Drivotin O. I., Egorov N. V., Zhabko A. P., Kamachkin A. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Petrosjan L. A., Polyakova L. N., Shamberov V. N., Chistjakov S. V. – P. A. Nelepin (to the 85th birthday anniversary)</i>	183
ABSTRACTS	185
FROM EDITORIAL STAFF	197