УДК 512.64, 517.37, 530.145.1 Вестник СПбГУ. Сер. 4. Т. 1 (59). 2014. Вып. 4

А. А. Багаев, Ю. М. Письмак

ФОРМАЛИЗМ ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Обсуждается вариант формализма фонового поля, предложенный Л. Д. Фаддеевым, возникающие при этом граничные условия специального вида и квантовые уравнения движения. Рассмотрены новые конструкции типа производящих функционалов S-матрицы. Функциональные (или континуальные) интегралы заменены кратными интегралами Римана по конечномерному вещественному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, а действие свободной теории является квадратичной формой, заданной скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$. Действие теории со взаимодействием — некоторая скалярная функция многих переменных или нелинейный функционал на этом пространстве. Получившаяся «0-мерная теория поля», во-первых, вещественна, во-вторых, свободна от любых расходимостей, в частности, отсутствуют объёмные множители, и, в-третьих, все квантовые величины однозначно определены. Предложен «дискретный» аналог версии Фаддеева производящего функционала. Для этого потребовалось ввести расширенное пространство интегрирования — прямую сумму основного и вспомогательного пространств, и сингулярную меру интегрирования. Дискретный функционал в варианте Васильева—Письмака может быть записан непосредственно. Найдено условие согласования двух вариантов производящих функционалов. Работа носит методический характер. Библиогр. 46 назв.

Ключевые слова: формализм фонового поля, производящие функционалы, гауссовы интегралы, асимптотические разложения.

A. A. Bagaev, Yu. M. Pis'mak

BACKGROUND FIELD FORMALISM FOR MULTIPLE INTEGRALS

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

L. D. Faddeev's version of background field formalism and its attributes — special boundary conditions and quantum equations of motions — are discussed. Some new constructions like the S-matrix generating functional are considered. Now the functional integrals (Feynman's path integrals) are replaced by usual multiple Riemannian ones over finite-dimensional real Euclidean space; a free field action becomes a quadratic form provided by scalar product on that space. An action with interaction now is some scalar function on multiple variables or non-linear functional on our integrating space. The obtained "0D field theory", firstly, is real, secondly, is divergence-free and thirdly, all the quantum quantities are defined without any ambiguities. In particular, there are no volume factors. A "discrete" analog of Faddeev's generating functional is proposed via introducing of extended integration space. It is equal to direct sum of basic and auxiliary spaces and has singular integration measure. Vassil'ev—Pis'mak's discrete generating functional can be written down directly. The compatibility condition for both functionals is founded. This paper is methodical. Refs 46.

Keywords: background field formalism, generating functionals, Gaussian integrals, asymptotic series.

Введение. Формализм фонового поля [1–3] является современным подходом квантовой теории поля. С его помощью удаётся наиболее просто решать задачи вычисления эффективных действий и наблюдать эффекты, выходящие за рамки теории возмущений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-02-00412-а.

Основной объект изучения метода фонового поля — это производящий функционал S-матрицы [4, 5]. Его вариационные производные суть коэффициентные функции матрицы рассеяния, через которые выражаются амплитуды рассеяния. В традиционной теории поля чаще используется производящий функционал функций Грина, который содержит информацию обо всех n-точечных функциях Грина.

Производящие функционалы S-матрицы. Производящие функционалы удобно выражать через функциональный или континуальный интеграл [6–8]. Примем, что действие исходной теории поля φ имеет вид $S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_{\mathrm{I}}(\varphi)$, где S_0 — действие свободной теории, т. е. квадратичная часть S; S_{I} — действие взаимодействия. Тогда производящий функционал коэффициентных функций S-матрицы имеет вид

$$R(\varphi_0) = \int\limits_{\mathcal{F}} e^{iS_0(\varphi)+iS_{\mathrm{I}}(\varphi+\varphi_0)}\mathscr{D}\varphi, \tag{1}$$

где пространство функционального интегрирования $\mathcal{F}$ — множество полей, удовлетворяющих условиям излучения Фейнмана [5, 16]; $\varphi_0 \in \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Интересна реализация формализма фонового поля, которую предложил Л. Д. Фаддеев [9–11]. Она позволяет наиболее просто проводить перенормировку асимптотически свободных теорий, имеющих одну константу связи, например, полей Янга—Миллса, нелинейной сигма-модели. В этом подходе удобнее другое представление производящего функционала S-матрицы [12–16]:

$$e^{i\Gamma(\varphi_{\mathrm{ph}})} := Z^{-1}\int\limits_{\mathcal{F}} e^{iS(\varphi+\varphi_{\mathrm{ph}})}\mathscr{D}\varphi, \tag{2}$$

где фоновое (внешнее) поле φ_{ph} имеет фиксированные асимптотики при $x^0 \to \pm\infty$. Будем считать $\varphi_{\mathrm{ph}} \in \mathcal{D} \supset \mathcal{F}$, подробнее — см. [17].

Связная часть (2), т. е. показатель экспоненты Γ тогда и только тогда является эффективным действием, когда фоновое поле φ_{ph} удовлетворяет квантовым уравнениям движения. По определению [9], левая часть квантовых уравнений движения — сумма левой части классических уравнений движения $\delta S(\varphi_{\mathrm{ph}})/\delta\varphi_{\mathrm{ph}}$ и вкладов всех одночастично-неприводимых диаграмм с одной внешней линией. Также квантовые уравнения движения — это условия согласования преобразования Лежандра [8, 18] функционала $W_{\varphi_{\mathrm{ph}}}(J)$ — логарифма модернизированного производящего функционала функций Грина

$$G(J) = \int\limits_{\mathcal{F}} \exp\{iS(\varphi+\varphi_{\mathrm{ph}}) + \varphi J\}\mathscr{D}\varphi$$

при $J = 0$ и нулевом среднем поле [17].

Уравнение Швингера. Если использовать вышеописанный метод для конкретных практических вычислений, например, эффективных действий различных полевых моделей, нет необходимости учитывать граничные условия $\varphi_{\mathrm{ph}} \in \mathcal{D}$, можно де-факто игнорировать квантовые уравнения движения и считать φ_{ph} некоторым классическим внешним полем [19, 20]. Имеющиеся результаты вычислений эффективного действия [10, 21–27] подкрепляют справедливость такого подхода.

Как известно, имеет место уравнение Швингера [8, 28]: функциональный интеграл от вариационной производной равен нулю. Поэтому

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{\mathrm{ph}}}\int\limits_{\mathcal{F}} e^{iS(\varphi+\varphi_{\mathrm{ph}})}\mathscr{D}\varphi = \int\limits_{\mathcal{F}} \frac{\delta}{\delta\varphi_{\mathrm{ph}}} e^{iS(\varphi+\varphi_{\mathrm{ph}})}\mathscr{D}\varphi = \int\limits_{\mathcal{F}} \frac{\delta}{\delta\varphi} e^{iS(\varphi+\varphi_{\mathrm{ph}})}\mathscr{D}\varphi = 0, \tag{3}$$

т. е. производящий функционал (2) оказывается равным константе. Очевидно, что цепочка равенств (3) не приводит к нулю в том и только том случае, когда

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rm ph}}\,F(\varphi+\varphi_{\rm ph}) \neq \frac{\delta}{\delta\varphi}\,F(\varphi+\varphi_{\rm ph}), \tag{4}$$

где $F = \exp\{iS\}$. Разумеется, неравенство (4) не противоречит определениям фаддеевской версии формализма фонового поля, ибо переменные φ и $\varphi_{\rm ph}$ принадлежат разным функциональным пространствам.

Поставим задачу явно построить конструкцию типа (2), для которой выполнялось бы неравенство (4), и, следовательно, она давала бы нетривиальный функционал внешнего поля. В нашей модели предполагается вместо функционального пространства интегрирования использовать конечномерное вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а вместо континуального интеграла риманов интеграл. Помимо очевидного упрощения всех возможных вычислений такой подход обеспечивает существование и однозначное определение квантово-полевых величин — производящих функционалов, амплитуд рассеяния, критических индексов и т. п.

Нульмерная теория поля. Методы квантовой теории поля, такие как фейнмановская диаграммная техника [29], могут быть применены для анализа интегралов от функций специального вида.

Одномерным гауссовым интегралом, или интегралом Эйлера—Пуассона, называется

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\,ax^2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},\ a > 0. \tag{5}$$

Пусть показатель экспоненты $S(x)$ подынтегральной функции имеет вид

$$S(x) = \frac{1}{2}\,ax^2 + S_{\rm I}(x),$$

где функция $S_{\rm I}(x) \geqslant 0$, $x \to \pm\infty$. В реальных ситуациях $S_{\rm I}(x)$ — это полином степени, старшей 2, но, вообще говоря, может быть любой аналитической функцией, удовлетворяющей условиям неотрицательности. Чтобы вычислить интеграл от $\exp\{-S(x)\}$, представим $\exp\{-S_{\rm I}(x)\}$ рядом Тейлора по переменной x. Вклад члена нулевого порядка — правая часть формулы (5). Вклады мономов нечётной степени суть нечётные функции, их интегрирование по симметричной области даёт ноль. Оставшиеся интегралы от мономов чётной степени легко вычислить:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\,ax^2}x^{2n}dx = (-2)^n\frac{d^n}{da^n}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\,ax^2}dx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{a^n}.$$

Правая часть может быть интерпретирована следующим образом. Квадратный корень — $(\det\frac{a}{2\pi})^{-1/2}$ — это детерминант оператора квадратичной формы [8], так как матрица над пространством $\mathbb{R}$ является вещественным числом; a^{-1} — это интегральное ядро обратного оператора, т. е. функция Грина, или пропагатор; коэффициент при a^{-n} — число способов спаривания множителей монома x^{2n}. Согласно основным принципам квантовой теории поля [29–32], усреднённому спариванию полей соответствует пропагатор — линия диаграммы Фейнмана; степеням мономов $S_{\mathrm{I}}(x)$ — вершины диаграммы соответствующих степеней [33]. Если сопоставить этим вершинам степени некоторой величины — константы связи λ (например, $S_{\mathrm{I}}(x) = (\lambda/4!)x^4$), можно заметить, что рассматриваемый интеграл будет иметь вид разложения по степеням λ. Очевидно, что это разложение асимптотическое [34, 35].

Для однократных интегралов диаграммная техника тривиальна. В случае n-кратных интегралов ax^2 заменяется на невырожденную положительно определённую квадратичную форму над $\mathbb{R}^n$. Поле $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ теперь зависит от дискретной переменной i — номера координаты вектора $\vec{x} = \{x_i\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, имеем векторное или изотопическое поле [36, 37], которое является функцией не пространственно-временны́х координат и изотопических индексов, а только изотопических индексов. Поэтому такую теорию поля иногда называют 0-мерной, или дискретной. Кратный интеграл играет роль функционального интеграла D-мерной теории.

Нульмерная теория поля иначе называется теорией случайных матриц [38]. Однако мы используем не «матричный» подход, где действие — функционал типа следа, а функциональное интегрирование производится с мерой Хаара [39], а описанный выше «векторный». Он представляется авторам более общим.

Теория поля определяется функционалом действия $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$S = \frac{1}{2} \langle \vec{x}, K_0 \vec{x} \rangle + S_{\mathrm{I}}(\vec{x}),$$

где первое слагаемое — S_0 — невырожденная положительно определённая квадратичная форма, угловыми скобками обозначено скалярное произведение на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; K_0 — симметричная квадратная матрица $n \times n$, $\det K_0 \neq 0$; S_{I} — «действие взаимодействия» [7, 8] — новый функционал $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — сумма старших порядков S. Потребуем, чтобы

$$S_{\mathrm{I}}(\vec{x}) \geqslant 0, \ |\vec{x}| \to \infty. \tag{6}$$

Гауссов интеграл теперь равен $(\det \frac{K_0}{2\pi})^{-1/2}$. Линиям диаграмм соответствует пропагатор $\Delta := K_0^{-1}$ — матрица — зависит от двух изотопических координат. Выражения вершин содержат комбинации символов Кронекера. Поэтому вклады диаграмм — конструкции типа различных матричных следов и их произведений.

Дискретные производящие функционалы *S*-матрицы. Построим аналог формулы (1) — производящий функционал S-матрицы в форме Васильева—Письмака:

$$R_{\mathrm{V-P}}(\vec{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle \vec{x}, K_0 \vec{x} \rangle - S_{\mathrm{I}}(\vec{x}+\vec{y})} d\vec{x}. \tag{7}$$

Положительная определённость и невырожденность K_0, а также условие (6) обеспечивают сходимость интеграла (7) $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Функционал коэффициентных функций понимается как ряд Тейлора функции n переменных [40]:

$$R_{\mathrm{V-P}}(\vec{y}) = \mathrm{const} + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} s_\alpha y^\alpha,$$

где α — мультииндекс [41], т. е. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. «Коэффициентные функции» $s_\alpha = s_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ также зависят от изотопических индексов.

Таким образом, представление производящего функционала S-матрицы через функциональный интеграл в варианте Васильева—Письмака непосредственно переносится на случай «0-мерной» теории поля. Так же перенести производящий функционал в варианте Фаддеева (2) нельзя — необходимо обеспечить выполение (4).

Поставим задачу предъявить такой нетривиальный функционал, который:

1) вместо конструкции $(1/2)\langle\vec{x},K_0\vec{x}\rangle+S_{\mathrm{I}}(\vec{x}+\vec{y})$ содержит $S(\vec{x}+\vec{y})$;

2) даёт (7), когда переменная y удовлетворяет некоторым условиям.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n+m}$. Оно, очевидно, раскладывается в прямую сумму: $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^m$ [42], поэтому вектор $x\in\mathbb{R}^{n+m}$ можно обозначить: $x=(\vec{x},x')^\top$, где $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $x'\in\mathbb{R}^m$. Вторую компоненту прямой суммы ($\mathbb{R}^m$) будем называть вспомогательным пространством. Любую симметричную матрицу $(n+m)\times(n+m)$ можно представить как

$$K=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{m}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc}K_0 & \vdots & \mathrm{B}\\ \cdots & \cdot & \cdots\\ \mathrm{B}^\top & \vdots & \mathfrak{a}\end{array}\right)\begin{array}{l}\}n\\ \}m\end{array}\end{array},\quad K_0^\top=K_0,\ \mathfrak{a}^\top=\mathfrak{a}. \tag{8}$$

Примем дополнительное условие

$$\det K_0\neq 0$$

и рассмотрим вместо (7) следующий функционал $R_{\mathrm{F}}:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$:

$$R_{\mathrm{F}}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{-\frac{1}{2}\langle Px+y,K(Px+y)\rangle-\hat{S}_{\mathrm{I}}(x+y)}\mathscr{D}x, \tag{9}$$

где мера интегрирования $\mathscr{D}x:=\delta((I-P)x)d^{n+m}x=\delta^m(x')d^{n+m}x$, δ,δ^n — δ-функции Дирака соответствующей размерности, а P — первый проектор прямой суммы $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^m$. Скалярное произведение здесь берётся в «большом» пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. По определению, (9) зависит только от «вспомогательной» части y', так как мера является сингулярной.

Коэффициентные функции S-матрицы суть коэффициенты тейлоровского разложения $R_{\mathrm{F}}(y)$. Выясним, при каких условиях на фоновое поле y они равны соответствующим коэффициентам s функционала $R_{\mathrm{V-P}}(\vec{y})$.

Во-первых, действия взаимодействия должны быть естественным образом связаны:

$$\hat{S}_{\mathrm{I}}(Px)=S_{\mathrm{I}}(\vec{x}). \tag{10a}$$

Во-вторых, преобразуем интеграл (9). Используя явный вид матрицы K, раскроем квадратичную форму:

$$\langle Px+y,K(Px+y)\rangle=\langle\vec{x}+\vec{y}+\Delta By',K_0(\vec{x}+\vec{y}+\Delta By')\rangle_1+\left\langle y',\left[\mathfrak{a}-\mathrm{B}^\top\Delta\mathrm{B}\right]y'\right\rangle_2,$$

где цифрами 1, 2 обозначены скалярные произведения в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно. Имеем

$$R_{\mathrm{F}}(y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle y',\left[\mathfrak{a}-\mathrm{B}^\top\Delta\mathrm{B}\right]y'\right\rangle_2\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\vec{x}+\vec{y}+\Delta By',K_0(\vec{x}+\vec{y}+\Delta By')\rangle_1-S_{\mathrm{I}}(\vec{x}+\vec{y})\right\}d\vec{x}=$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle y', \left[\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right] y'\right\rangle_2\right\} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle \vec{x}, K_0 \vec{x}\rangle_1 - S_{\mathrm{I}}(\vec{x} - \Delta B y')\right\} d\vec{x},$$

где последний знак равенства — замена переменной интегрирования: $\vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{y} - \Delta B y'$.

Если принять

$$\vec{y} := -\Delta B y', \tag{10б}$$

функционал $R_{\mathrm{F}}(y)$ становится равным $R_{\mathrm{V-P}}(\vec{y})$ с точностью до внеинтегрального множителя. Выясним условия отсутствия этого множителя.

Можно показать [43], что $\operatorname{rang}\left(\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right) = \operatorname{rang} K - n$. Поскольку матрица K_0 невырожденная, $n \leqslant \operatorname{rang} K \leqslant n + m$, следовательно, $0 \leqslant \operatorname{rang}\left(\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right) \leqslant m$. Возможны два принципиально различных случая:

1) $\operatorname{rang}\left(\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right) = m$, т. е. матрица K невырождена. Тогда равенство нулю показателя экспоненты эквивалентно тому, что $y' = 0$. Это означает, что (7) и (9) совпадают только при нулевом фоновом поле;

2) $0 \leqslant \operatorname{rang}\left(\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right) < m$, т. е.

$$\det K = 0. \tag{10в}$$

Теперь показатель экспоненты равен нулю, если вектор y' — решение уравнения

$$\left(\mathfrak{a} - \mathrm{B}^\top \Delta \mathrm{B}\right) y' = 0. \tag{10г}$$

Такой y' параметризуется вектором $y'' \in \mathbb{R}^{n+m-\operatorname{rang} K}$: $y' = C y''$, где C — некоторая матрица $m \times (n + m - \operatorname{rang} K)$, $\operatorname{rang} C = m$.

Первый случай бессодержательный, поскольку внешнее поле оказывается равным нулю. Следовательно, остаётся второй. Таким образом, условия (10) обеспечивают равенство

$$R_{\mathrm{F}}(y) = R_{\mathrm{V-P}}(\vec{y}). \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что система уравнений (10*б*), (10*г*) равносильна уравнению

$$K y = 0, \tag{12}$$

которое является условием стационарности действия свободной теории $(1/2)\langle y, Ky\rangle$. Уравнение (12) можно назвать также классическим уравнением движения. Значит, в левой части (11), как говорят, фоновое поле y «на массовой поверхности» (терминология отсылает к псевдоевклидовой версии теории поля в импульсном представлении [32, 44]). Этот факт полностью соответствует фаддеевскому определению производящего функционала S-матрицы [9–16], где называется граничными условиями, которые реально являются условиями излучения Фейнмана.

Условие (12), очевидно, более сильное, чем (10*г*):

$$Ky = 0 \Rightarrow \langle Px + y, K(Px + y)\rangle = \langle Px, KPx\rangle = \langle \vec{x}, K_0 \vec{x}\rangle_1$$

и мы сразу получаем (11). Однако для совпадения коэффициентных функций s_α^{F} и $s_\beta^{\mathrm{V-P}}$ параметризация (10*б*) непринципиальна, потому что они равны на общей области определения:

$$s_\alpha^{\mathrm{F}} = s_\beta^{\mathrm{V-P}},$$

если $\alpha = \beta$ как мультииндексы.

Таким образом, фаддеевский вариант производящего функционала (9) корректно определён.

Заключение. Основной результат нашей работы — корректное построение фаддеевской версии формализма фонового поля — носит методический характер. Это важная задача теоретической и математической физики. Её изучение позволит глубже понять математическую природу основных объектов квантовой теории поля: эффективного действия, производящих функционалов и т. п. Например, граничные условия, благодаря которым выполняется неравенство (4), удалось интерпретировать с помощью введения расширенного пространства интегрирования, которому принадлежит фоновое поле.

Ожидаются результаты применения разработанного подхода к квантово-полевым вычислениям. Так, планируется рассмотреть дискретный аналог векторной модели ϕ^4, т. е. $S_{\mathrm{I}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, и построить $1/N$-разложение для критических индексов вплоть до четвёртого порядка. Разложение $1/N$ для критических индексов модели ϕ^4 построено во втором и третьем порядках в работах [45, 46].

Интересно также сопоставить рассмотренную версию нульмерной теории поля и теорию случайных матриц [38].

Использование квантово-полевых методов и, в частности, формализма фонового поля для вычисления кратных интегралов может быть полезным при построении асимптотических разложений интегралов специального вида.

* * *

Авторы благодарят академика Людвига Дмитриевича Фаддеева за ценные консультации и многолетнее научное руководство (А. А. Багаев).

Литература

1. *Abbott L. F.* The background field method beyond one loop // Nucl. Phys. (B). 1982. Vol. 185, N 1. P. 189–203.

2. *Коулмен С.* Тайная симметрия: введение в теорию спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей // Квантовая теория калибровочных полей: сб. статей / пер. с англ.; под ред. Н. П. Коноплёвой. М.: Мир, 1977. С. 23–119.

3. *De Witt B. S.* Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory // Phys. Rev. 1967. Vol. 162, N 5. P. 1195–1239.

4. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 604 с.

5. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 448 с.

6. *Фрадкин Е. С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике // Квантовая теория поля и гидродинамика. Некоторые вопросы квантовой теории релятивистских статистических систем и гидродинамика: труды физ. ин-та им. П. Н. Лебедева. Т. XXIX / под ред. Д. В. Скобельцина. М.: Наука, 1965. С. 7–138.

7. *Васильев А. Н., Письмак Ю. М.* Унитарность виковской T-экспоненты // Теор. мат. физика. 1973. Т. 15, № 2. С. 182–196.

8. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 295 с.

9. *Faddeev L.* Mass in quantum Yang—Mills theory (comment on Clay Millennium problem) // Bull. Braz. Math. Soc. 2004. Vol. 33, N 2. P. 1–12.

10. *Фаддеев Л. Д.* Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга—Миллса // Теор. мат. физика. 2006. Т. 148, № 1. С. 133–142.

11. *Faddeev L. D.* Separation of scattering and selfaction revisited // Subtleties in quantum field theory: Lev Lipatov Festschrift / ed. by D. Diakonov. Gatchina: PNPI, 2010. P. 1–6.

12. *Попов В. Н., Фаддеев Л. Д.* Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей. Препринт ИТФ-67-036. Киев, 1967. 28 с.

13. *Попов В. Н., Фаддеев Л. Д.* Ковариантное квантование гравитационного поля // Усп. физ. наук. 1973. Т. 111, № 3. С. 427–450.

14. *Арефьева И. Я., Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Производящий функционал S-матрицы в калибровочно-инвариантных теориях // Теор. мат. физика. 1974. Т. 21, № 3. С. 311–321.

15. *Faddeev L. D.* Inroduction to the functional methods // Methods in field theory (Les Houches session XXVIII) / eds R. Balian, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. P. 3–40.

16. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978. 240 с.

17. *Багаев А. А.* Эффективное действие в формализме фонового поля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 2012. Вып. 3. С. 56–65.

18. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

19. *Поляков А. М.* Калибровочные поля и струны / пер. с англ. Ижевск: изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 312 с.

20. *Jack I., Osborn H.* Two-loop background field calculations for arbitrary background fields // Nucl. Phys. (B). 1982. Vol. 207. P. 474–504.

21. *Багаев А. А.* Перенормировка квантовых уравнений движения для полей Янга—Миллса в формализме фонового поля // Зап. научн. семин. ПОМИ РАН. 2005. Т. 325. С. 5–12.

22. *Bagaev A. A.* Renormalization of the quantum equation of motion for Yang—Mills fields in the background formalism // J. Math. Sci. 2006. Vol. 138, N 3. P. 5631–5635.

23. *Börnsen J.-P., van de Ven A. E. M.* Three-loop Yang—Mills β-function via the covariant background field method // Nucl. Phys. (B). 2003. Vol. 657. P. 257–303.

24. *Багаев А. А.* Замечание о перенормировке эффективного действия и квантовых уравнений движения для модели sin-Гордона в формализме фонового поля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 2010. Вып. 1. С. 162–164.

25. *Багаев А. А.* Применение формализма фонового поля к исследованию матричной σ-модели // Труды молодёжн. научн. конф. «Физика и прогресс». СПб., 2007. С. 84–88.

26. *Багаев А. А.* Двухпетлевые вычисления эффективного действия матричной σ-модели в формализме фонового поля // Теор. мат. физика. 2008. Т. 154, № 2. С. 354–362.

27. *Багаев А. А.* Об устранении квадратичной по импульсу расходимости нелинейной сигма-модели в формализме фонового поля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 2011. Вып. 4. С. 4–7.

28. *Schwinger J.* On the Green's functions of quantized fields. I // Proc. Nat. Acad. Sci. 1951. Vol. 37, N 7. P. 452–455.

29. *Feynman R. P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20, N 2. P. 367–387.

30. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 656 с.

31. *Хенли Э., Тирринг В.* Элементарная квантовая теория поля. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 316 с.

32. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 1. М.: Наука, 1968. 480 с.

33. *Харари Ф.* Теория графов / пер. с англ. М.: Мир, 1973. 300 с.

34. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения / пер. с англ. М.: Физматлит, 1962. 127 с.

35. *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 312 с.

36. *Yang C. N., Mills R. L.* Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // Phys. Rev. 1954. Vol. 96, N 1. P. 191–195.

37. *Янг Ч., Миллс Р.* Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность // Элементарные частицы и компенсирующие поля: сб. статей / под ред. Д. Д. Иваненко. М.: Мир, 1964. С. 28–38.

38. *Di Francesco P.* 2D Quantum gravity, matrix models and graph combinatorics // Applications of random matrices in physics: Proc. NATO advanced study institute (Les Houches, France) / eds É. Brézin, V. Kazakov, D. Serban, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2006. P. 33–88.

39. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. 519 с.

40. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: в 5 т. М.: Наука, 1974. Т. 1. 479 с.

41. *Saint Raymond X.* Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators. Boca Ration, Florida: CRC Press, 1991. 116 p.

42. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.

43. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

44. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.

45. *Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р.* $1/n$-Разложение: расчёт индекса η в порядке $1/n^3$ методом конформного бутстрапа // Теор. мат. физика. 1982. Т. 50, № 2. С. 195–206.

46. *Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р.* $1/n$-Разложение: расчёт индексов η и ν в порядке $1/n^2$ для произвольной размерности // Теор. мат. физика. 1981. Т. 47, № 3. С. 291–306.

Статья поступила в редакцию 1 июля 2014 г.

Контактная информация

Багаев Алексей Анатольевич — кандидат физико-математических наук; e-mail: bagaew@mail.ru
Письмак Юрий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: ypismak@yahoo.com

Bagaev Aleksei Anatolievich — Candidate of Physics and Mathematics; e-mail: bagaew@mail.ru
Pis'mak Yurii Mikhailovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor; e-mail: ypismak@yahoo.com