

## ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Е. К. Колесников, Г. Н. Ключников*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Известно аналитическое решение задачи о дрейфе ведущего центра заряженной частицы по силовой поверхности дипольного поля. В настоящей работе доказано, что решение соответствующей задачи можно получить и для поля, представляющего собой суперпозицию дипольного и однородного магнитных полей, где магнитный момент диполя параллелен или антипараллелен индукции однородного поля. Кроме того, построены области слабой локальной неоднородности суперпозиционного поля и определены энергии электронов, для которых силовая поверхность с заданным экваториальным параметром полностью содержится в области слабой локальной неоднородности. Библиогр. 6 назв. Ил. 3.

*Ключевые слова:* заряженные частицы, магнитное поле Земли, ведущий центр, дрейфовые уравнения, силовые линии.

**Введение.** В настоящей работе рассмотрена задача о динамике заряженной частицы в суперпозиции поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, параллельного магнитному моменту диполя. Отметим, что указанная модель может быть использована для описания магнитного поля Земли на достаточно больших расстояниях от её центра (порядка десяти земных радиусов). На указанных расстояниях основной вклад в поле внутренних источников даёт первая (дипольная) гармоника геомагнитного потенциала, а поле внешних гармоник приближённо соответствует модели однородного магнитного поля. Известно, что точное решение системы дифференциальных уравнений динамики заряженной частицы в магнитном поле, представляющем из себя суперпозицию дипольного и однородного магнитного полей, в общем случае не может быть получено. В то же время в случае дипольного магнитного поля было найдено (см. [1]) аналитическое решение динамической задачи с использованием так называемых дрейфовых уравнений движения, описывающих движение ведущего центра заряженной частицы по силовой поверхности дипольного магнитного поля. В настоящей работе будет показано, что использование дрейфовых уравнений движения позволяет получить аналитическое решение и задачи о дрейфе ведущего центра заряженной частицы в суперпозиционном поле.

**Общая постановка задачи о движении заряженной частицы в суперпозиционном поле. Основные качественные особенности суперпозиционного поля.** Рассмотрим движение заряженной частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $q$  в магнитном поле Земли. Уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \nabla V, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  — радиус-вектор и скорость частицы соответственно,  $c$  — скорость света,  $m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  — масса частицы,  $V$  — скалярный потенциал магнитного поля.

Пусть  $(\rho, \varphi, z)$  — цилиндрическая система координат, где  $\rho$  — расстояние до магнитной оси, а ось  $z$  направлена противоположно магнитному моменту  $\mathbf{M}$ . Потенци-

ал  $V$  может быть представлен в виде

$$V = V_d + V_0, \quad (2)$$

где  $V_d = -Mz/r^3$  — потенциал поля диполя,  $V_0 = -B_0z$  — потенциал однородного поля. В выражении для  $V_0$  через  $B_0$  обозначен модуль индукции однородного магнитного поля.

Впервые на возможность представления геомагнитного поля в ограниченной области пространства суперпозицией поля диполя и однородного поля было указано в работе [2]. Указанная модель была использована при аналитическом исследовании влияния поля внешних источников на динамику заряженных частиц в магнитосфере Земли (см. [3, 4]).

Разложим индукцию  $\mathbf{B} = -\nabla V$  по ортам цилиндрической системы координат  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_z$ , используя (2):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_d = -3M \frac{\rho z \mathbf{e}_\rho}{r^5} + \left( M \frac{\rho^2 - 2z^2}{r^5} + B_0 \right) \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Уравнение для определения силовых линий суперпозиционного поля (3) —

$$\frac{d\rho}{B_\rho} = \frac{dz}{B_z}, \quad \varphi = \text{const}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что силовые линии задаются уравнением

$$\frac{\tilde{\rho}^2}{\tilde{r}^3} - \alpha \tilde{\rho}^2 = C, \quad (5)$$

где  $\alpha = B_0 C_{st}^3 / 2M > 0$ , если  $\mathbf{B}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{M}$ ,  $\tilde{\rho} = \rho / C_{st}$ ,  $\tilde{r} = r / C_{st}$ ,

$C_{st} = \sqrt{qM/mvc}$  — штермеровская единица длины (см. [4]),  $C$  — постоянная интегрирования.

Будем в дальнейшем опускать значок „ $\sim$ “, считая, что все расстояния измерены в штермеровских единицах длины. Если силовая линия пересекает экваториальную плоскость, то (5) можно переписать так:

$$\frac{\rho^2}{r^3} - \alpha \rho^2 = \frac{1 - \alpha r_e^3}{r_e}, \quad (6)$$

где  $r_e$  — расстояние от начала координат до точки пересечения рассматриваемой силовой линии с экваториальной плоскостью.

Анализ уравнения (5) показывает, что в зависимости от знака параметра  $\alpha$  существуют два различных случая расположения силовых линий:  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$  (см. рис. 1). При  $\alpha > 0$  (рис. 1, а) выделяются следующие три типа силовых линий: замкнутые, проходящие через начало координат; полуокружности (одна при выбранном значении  $\alpha$ ; эта силовая линия соответствует  $C = 0$ ) и разомкнутые кривые, пересекающие экваториальную плоскость. При  $\alpha < 0$  также существуют три типа силовых линий: замкнутые, проходящие через начало координат; уходящие на бесконечность и проходящие через начало координат; уходящие на бесконечность и соответствующие ненулевому значению  $r_e$  (см. также [3]).

**Общие условия применимости дрейфового приближения. Дрейфовые уравнения движения в суперпозиционном поле и их решение.** Дадим общую формулировку дрейфовых уравнений движения.

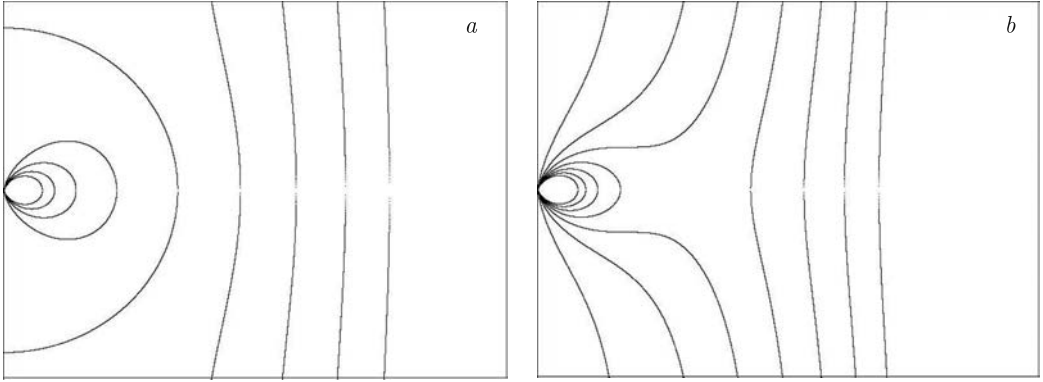


Рис. 1. Силовые линии суперпозиционного поля в зависимости от знака  $\alpha$ :  $a - \alpha = 0.1$ ;  $b - \alpha = -0.1$ .

Пусть заряженная частица движется в магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Будем предполагать, что выполнены условия слабой неоднородности поля  $\mathbf{B}$  (см. [5, 6]):

$$\begin{cases} \rho_L |(\nabla B)_\perp| \ll B, \\ v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel| \ll B, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\rho_L = mv_\perp/qB$  — радиус ларморовского вращения,  $T_g = 2\pi m/qB$  — период ларморовского вращения,  $v_\perp$  — проекция скорости частицы на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ ,  $v_\parallel$  — проекция скорости частицы на направление  $\mathbf{B}$ ,  $|(\nabla B)_\perp|$  — модуль проекции градиента  $B$  на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ ,  $|(\nabla B)_\parallel|$  — модуль проекции градиента  $B$  на направление  $\mathbf{B}$ . В однородном поле, как известно, движение можно представить как композицию вращения по ларморовской окружности и движения центра ларморовской окружности вдоль силовой линии. В каждый момент времени будет выполнено равенство

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор, проведённый из центра вращения (ведущего центра) в точку, в которой находится частица,  $\mathbf{c}$  — текущее положение ведущего центра.

При выполнении условий (7) равенство (8) также будет выполнено, но, в отличие от движения в однородном поле, величины  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$  медленно меняются со временем,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ , а ведущий центр может двигаться поперёк геомагнитного поля, перемещаясь с одной силовой линии на другую.

Скорость частицы  $\mathbf{v}$  состоит из двух частей: скорости вращения  $\mathbf{w}$  и скорости дрейфа  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{w} + \mathbf{u}. \quad (9)$$

В рассмотренном приближении с использованием метода усреднения из точного уравнения движения частицы могут быть получены уравнения, описывающие дрейф ведущего центра (см. [5]):

$$\begin{cases} m\mathbf{b} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mu\mathbf{b}\nabla B, \\ \mathbf{u}_\perp = \left( -\mu \left( 1 + \frac{2u_\parallel^2}{w^2} \right) \nabla B - m \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right) \times \frac{c\mathbf{B}}{qB^2} + \frac{2c\mu u_\parallel^2}{w^2 qB} (\text{rot}\mathbf{B})_\perp, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ , величины с индексами  $\perp$  обозначают проекцию на плоскость  $\varphi = \text{const}$ , движущуюся вместе с частицей (будем называть такую плоскость ведущей). При этом продольное движение ведущего центра описывается первым уравнением (10), а поперечное — вторым уравнением (10). Здесь  $\mu = p_{\perp}^2/2\gamma mB$  — эквивалентный магнитный момент частицы, который при выполнении условий (7) является приближённым интегралом движения (см. [1]).

В [5] уравнения (10) выведены в предположении, что  $B \neq 0$ . Как ясно из (3), в суперпозиционном поле в отличие от дипольного существуют точки, удовлетворяющие условию  $B = 0$ . Вернёмся к этому случаю позже.

В рассматриваемом случае последнее слагаемое в правой части второго уравнения (10) равно нулю. Кроме того, будем во втором уравнении (10) пренебрегать слагаемыми, содержащими производную  $\frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt}$ , вследствие малости  $u_{\perp}$  по сравнению с  $v$ .

Введём в рассмотрение сферическую систему координат  $(r, \lambda, \varphi)$ , где  $r$  — расстояние до центра Земли,  $\lambda$  — широта,  $\varphi$  — долгота. Тогда из второго уравнения (10) следует, что  $\mathbf{u}_{\perp}$  имеет одну отличную от нуля составляющую  $u_{\varphi}$ :

$$u_{\varphi} = r \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{cm}{qB^2} \left( \frac{w^2}{2} + u_{\parallel}^2 \right) (\nabla B)_{\perp}. \quad (11)$$

Угол  $\varphi$  будем отсчитывать в направлении дрейфа частицы. Поскольку в рассматриваемом случае проекция  $\mathbf{u}_{\perp}$  на ведущую плоскость равна нулю, в этой плоскости ведущий центр остаётся на фиксированной силовой линии. Как и в случае дипольного поля, ведущий центр колеблется между двумя «зеркальными точками», причём функция  $\lambda(t)$  является периодической. Будем для определённости рассматривать участок траектории, на котором  $d\lambda/dt > 0$ , а затем воспользуемся соотношением  $\lambda(T/2 + t) = -\lambda(t)$ ,  $0 < t < T/2$ , где  $T$  — период функции  $\lambda(t)$ .

Пусть в начальный момент времени частица обладает скоростью  $\mathbf{v}$ , направленной под углом  $\theta$  к направлению местного магнитного поля. Тогда  $w_0 = v \sin \theta$ ,  $u_{\parallel 0} = v \cos \theta$  — начальные значения  $w$  и  $u_{\parallel}$ . Учитывая, что в магнитостатическом поле модуль скорости  $v$  остаётся постоянным, и используя сохранение магнитного момента  $\mu$ , можно показать (см. [1]), что текущее значение продольной компоненты скорости ведущего центра имеет вид

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\mu(B_1 - B)}{m}}, \quad (12)$$

где  $B_1 = B_0/\sin^2 \theta$  — значение индукции в так называемой зеркальной точке, в которой происходит отражение частицы от «магнитного зеркала».

Введём безразмерную индукцию  $\eta$ , связанную с индукцией  $B$  и параметром  $r_e$  следующим образом:

$$B = \frac{M\eta}{r_e^3}. \quad (13)$$

Аналогично (13) запишем  $B_1$ :

$$B_1 = \frac{M\eta_0}{r_e^3} = \frac{m(u_{\parallel}^2 + w^2)}{2\mu}, \quad (14)$$

где  $\eta_0$  — значение  $\eta$  в точке, в которой происходит отражение от магнитного зеркала.

Найдём скорость движения вдоль силовых линий поля:

$$u_{\parallel} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\lambda^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (15)$$

Функцию  $r(\lambda, \alpha)$  найдём из уравнения, задающего силовые линии, которое удобно представить в виде

$$r^3 + \frac{Cr}{\alpha \cos^2 \lambda} - \frac{1}{\alpha} = 0, \quad (16)$$

где  $C = (1 - \alpha r_e^3)/r_e$ .

Определим, какое значение  $r_e$  соответствует точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Чтобы ответить на этот вопрос, положим в (16)  $r = r_e$ ,  $\lambda = 0$  и решим кубическое уравнение

$$r_e^3 + \frac{Cr_e}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 0. \quad (17)$$

Интерес представляют только положительные корни уравнения (17). В зависимости от того, каких знаков величины  $D = 1/(4\alpha^2) + C^3/(27\alpha^3)$  и  $\alpha$ , представляются 4 возможных случая.

1. Если  $D \geq 0$  и  $\alpha > 0$  (замкнутые кривые на рис. 1, *a*), то по формуле Кардано получаем, что единственный положительный корень имеет вид

$$r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{C^3}{27\alpha^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2\alpha} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{C^3}{27\alpha^3}}}.$$

Остальные два корня являются комплексными.

2. Если  $D < 0$  и  $\alpha > 0$  (разомкнутые кривые на рис. 1, *a*), то уравнение (17) имеет один положительный корень, определяющийся по формуле  $r_e = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3)$ , где угол  $\psi$  удовлетворяет условию  $\cos \psi = \sqrt{-27\alpha/C^3}/2$ .
3. Если  $D \leq 0$  и  $\alpha < 0$  (разомкнутые кривые, не пересекающие экваториальную плоскость, на рис. 1, *b*), то уравнение (17) не имеет положительных корней. В этом случае один корень  $r_e$  вещественный и отрицательный, а два другие — комплексные.
4. Если  $D < 0$  и  $\alpha < 0$  (кривые, пересекающие экваториальную плоскость, на рис. 1, *b*), то существуют два положительных корня  $r_{e1}$  и  $r_{e2}$ , выражения для которых имеют вид

$$r_{e1} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3), \quad r_{e2} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3 + 4\pi/3),$$

где  $\cos \psi = -\sqrt{-27\alpha/C^3}/2$ .

Итак, в случаях 1 и 2 параметр  $r_e$  определён единственным образом, в случае 3 уравнение для определения  $r_e$  не имеет положительных корней, а в случае 4 одному значению  $C$  соответствуют 2 значения  $r_e$ . Замкнутой силовой линии соответствует меньшее значение  $r_{e2} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3 + 4\pi/3)$ ; силовой линии, уходящей на бесконечность (разомкнутой) — большее значение  $r_{e1} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3)$ .

Ограничимся рассмотрением движения ведущего центра вдоль замкнутых силовых поверхностей. С математической точки зрения это означает, что если уравнение (17) при заданном  $C$  будет иметь два корня, то из них следует выбрать наименьший.

Теперь выясним, в каких точках суперпозиционного поля  $B = 0$ . (3) показывает, что это условие выполнено, когда  $\tilde{\rho} = 0$  и  $\tilde{r} = \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha}}$ , либо  $\tilde{z} = 0$  и  $\tilde{r} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2\alpha}}$ . Первый случай возможен, только если силовая линия — полуокружность. Второй случай соответствует на рис. 1,  $b$  значению  $r_e$ , при котором происходит переход от замкнутых диполеподобных силовых линий к разомкнутым. Действительно, из равенства  $D = 0$  следует, что соответствующее значение постоянной  $C = 3\sqrt[3]{-\alpha/4}$ . После подстановки  $C$  в формулу для  $r_{e1}$  п. 4 получим  $r_{e1} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2\alpha}}$ . Итак, при движении ведущего центра вдоль замкнутых силовых поверхностей условие  $B \neq 0$  оказывается выполненным.

Чтобы упростить выражение для  $C$ , введём безразмерный параметр

$$\delta = \frac{B_0 r_e^3}{M}. \quad (18)$$

В (18) все величины, кроме  $\delta$ , измерены в единицах СГС.

Теперь можно переписать выражение для  $C$  следующим образом:

$$C = \frac{2 - \delta}{2r_e}. \quad (19)$$

Вернёмся к уравнению (16). Будем представлять его решение  $r(\lambda, \delta)$  в виде

$$r = F_1(\lambda, \delta)r_e. \quad (20)$$

Если  $\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} \geq 0$ , то

$$F_1(\lambda, \delta) = \sqrt[3]{\frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\delta} - \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda}}}; \quad (21)$$

если же  $\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} < 0$ , то

$$F_1(\lambda, \delta) = 2\sqrt{\frac{\delta - 2}{3\delta \cos^2 \lambda}} \cos \frac{\psi + 4\pi}{3}, \quad (22)$$

где  $\cos \psi = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{27\delta^3 \cos^6 \lambda}{(\delta - 2)^3}}$ ,  $\sin \psi > 0$ .

Для дальнейшего преобразования формулы (15) найдём также производную  $\frac{dr}{d\lambda}$ , которую будем представлять в виде

$$\frac{dr}{d\lambda} = F_2(\lambda, \delta)r_e. \quad (23)$$

В случае  $\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} \geq 0$

$$F_2(\lambda, \delta) = \frac{(2-\delta)^3 \sin \lambda}{27\delta^3 \cos^7 \lambda} \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \times \\ \times \left( \left( \frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} - \left( \frac{1}{\delta} - \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \right); \quad (24)$$

в случае  $\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} < 0$

$$F_2(\lambda, \delta) = 2\sqrt{\frac{\delta-2}{3\delta}} \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} \cos \frac{\psi+4\pi}{3} - 6\sqrt{\delta(\delta-2)} \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\delta\sqrt{\delta(\delta-2)^3 - 27\cos^6 \lambda}} \sin \frac{\psi+4\pi}{3}, \quad (25)$$

где, как и раньше,  $\cos \psi = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{27\delta^3 \cos^6 \lambda}{(\delta-2)^3}}$ ,  $\sin \psi > 0$ .

Из (14) и определения штермеровской единицы длины следует, что

$$C_{st}^2 = \frac{|q| r_e}{c} \sqrt{\frac{r_e M}{2m\mu\eta_0}}. \quad (26)$$

С учётом (12)–(15) получаем

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\mu M (\eta_0 - \eta)}{mr_e^3}}. \quad (27)$$

Теперь проведём необходимые вычисления, чтобы преобразовать вторую формулу (10). Для начала посчитаем модуль вектора **B**:

$$B = M \sqrt{\left(\frac{2}{r^3} - \frac{\delta}{r_e^3}\right)^2 \sin^2 \lambda + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\delta}{r_e^3}\right)^2 \cos^2 \lambda}. \quad (28)$$

В соответствии с (13) безразмерная индукция будет

$$\eta(\hat{r}, \lambda, \delta) = \sqrt{(2 - \delta\hat{r}^3)^2 \sin^2 \lambda + (1 + \delta\hat{r}^3)^2 \cos^2 \lambda},$$

где  $\hat{r} = r/r_e$ .

Далее, по правилу вычисления градиента в сферической системе координат

$$(\nabla B)_\perp = \frac{3M^3 \cos \lambda}{r_e^{10} F_1^4 B^2} \times \left( \left( \left( 2\delta - \frac{4}{F_1^3} \right) \sin^2 \lambda - \left( \delta + \frac{1}{F_1^3} \right) \cos^2 \lambda \right) \left( \delta + \frac{1}{F_1^3} \right) + \sin^2 \lambda \left( \frac{1}{F_1^3} - 2\delta \right) \left( \frac{2}{F_1^3} - \delta \right) \right). \quad (29)$$

Выделим функцию  $F_3(\lambda, \delta)$ , не зависящую от  $r$ :

$$(\nabla B)_\perp = \frac{M}{F_1^4 r_e^4 \eta^2} F_3(\lambda, \delta), \quad (30)$$

где

$$F_3(\lambda, \delta) = 3 \cos \lambda \left( \left( \left( 2\delta - \frac{4}{F_1^3} \right) \sin^2 \lambda - \left( \delta + \frac{1}{F_1^3} \right) \cos^2 \lambda \right) \left( \delta + \frac{1}{F_1^3} \right) + \sin^2 \lambda \left( \frac{1}{F_1^3} - 2\delta \right) \left( \frac{2}{F_1^3} - \delta \right) \right).$$

Определим поперечный полю безразмерный градиент  $(\widetilde{\nabla B})_{\perp}$ :

$$(\widetilde{\nabla B})_{\perp} = \frac{r_e^4 (\nabla B)_{\perp}}{M} = \frac{F_3(\lambda, \delta)}{F_1^4(\lambda, \delta) \eta^2}. \quad (31)$$

Из (11), (14), (20) и определения  $\mu$  следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c\mu M(\eta - 2\eta_0)}{qB^2 r_e^4 F_1(\lambda, \delta) \cos \lambda} (\nabla B)_{\perp}. \quad (32)$$

Из (20), (26), (27) и (32) получаем производную

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{M \left(1 - \frac{\eta}{2\eta_0}\right) (\nabla B)_{\perp} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}}{F_1 r_e C_{st}^2 B^2 \cos \lambda \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}} \cdot \text{sign}(-q), \quad (33)$$

где  $\text{sign}(-q)$  есть знак  $-q$ . В дальнейшем будем считать, что  $\text{sign}(-q) = 1$ .

Наконец, из (20), (23), (31), (33) и определения функции  $\eta$  находим искомую квадратуру, описывающую дрейф частицы в суперпозиционном поле:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^{\lambda} \left(\frac{r_e}{C_{st}}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{\eta}{2\eta_0}\right) (\widetilde{\nabla B})_{\perp} \widetilde{\Phi}}{F_1 \eta^2 \cos \lambda \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}} d\lambda, \quad (34)$$

где  $\widetilde{\Phi} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ .

На основе формулы (34) были построены графики зависимости  $\lambda(\varphi)$ . Рассматривались только пространственно ограниченные движения, каковыми заведомо являются движения по замкнутым силовым линиям (16). Таким силовым линиям соответствуют значения  $r(\lambda, \alpha)$  в форме (20)–(21) при  $0 < \delta < 2$  и в форме, соответствующей (20) и (22) при  $\delta < 0$ . Соответствующие графики представлены на рис. 2.

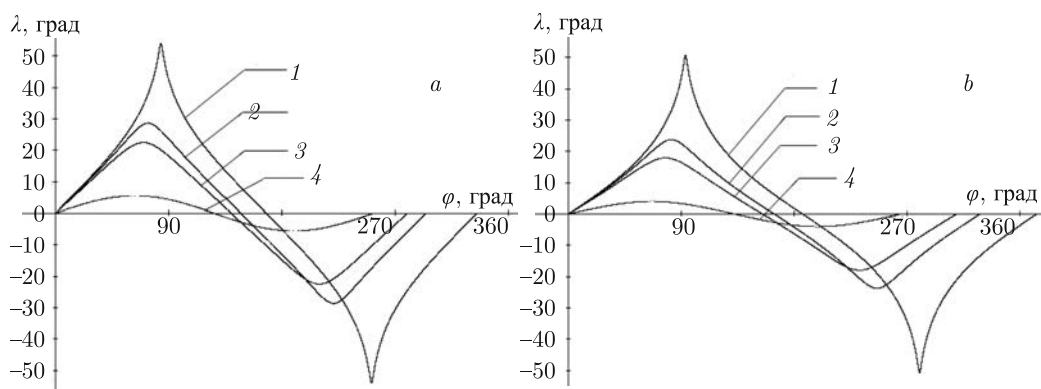


Рис. 2. Графики зависимости  $\lambda(\varphi)$  для различных значений  $\delta$ : а —  $\delta = 0, 1$ ; б —  $\delta = -0, 1$ .

На каждом из графиков представлены кривые 1–4, соответствующие следующим значениям угла  $\theta$  между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  при  $t = 0$ : 10, 30, 40 и 80 градусов. Как видно из рисунков, при возрастании  $\theta$  максимальная широта  $\lambda$  убывает.



**Условия применимости дрейфовых уравнений движения.** Вернёмся к условиям слабой неоднородности (1). Иначе можно записать их в виде

$$\begin{cases} \rho_L \frac{|(\nabla B)_\perp|}{B} \ll 1, \\ \frac{T_g}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \ll 1. \end{cases} \quad (35)$$

Если  $\alpha = B_0 C_{st}^3 / 2M \ll 1$ , то можно, как и в [6], считать условиями применимости дрейфового приближения неравенства

$$\begin{cases} \rho_L |(\nabla B)_\perp| \leq \beta_1^2 B, \\ v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel| \leq \beta_2^2 B, \end{cases} \quad (36)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — максимальные значения отношений  $\rho_L |(\nabla B)_\perp| / B$  и  $v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel| / B$ . Будем принимать за  $\beta_1^2$  и  $\beta_2^2$  соответствующие значения для дипольного поля. По данным, приведённым в [6],  $\beta_1 \approx 0.46$ ,  $\beta_2 \approx 0.66$ .

Вычислим теперь величины  $(\nabla B)_\perp$  и  $(\nabla B)_\parallel$ , чтобы преобразовать неравенства (36).

Если  $\tilde{r} = r / C_{st}$ , то из (28) следует, что

$$B_r = \frac{2M \sin \lambda}{C_{st}^3} \left( \frac{1}{\tilde{r}^3} - \alpha \right), \quad B_\lambda = -\frac{M \cos \lambda}{C_{st}^3} \left( \frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right). \quad (37)$$

С помощью формул (37) найдём модуль вектора магнитной индукции:

$$B = \sqrt{B_r^2 + r^2 B_\lambda^2} = \frac{M}{C_{st}^3} \sqrt{4 \left( \frac{1}{\tilde{r}^3} - \alpha \right)^2 \sin^2 \lambda + \left( \frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right)^2 \cos^2 \lambda}. \quad (38)$$

Удобно представить (38) в виде

$$B = \frac{M \tilde{B}}{\tilde{r} C_{st}^3}, \quad (39)$$

где  $\tilde{B}(\tilde{r}, \lambda, \alpha) = \sqrt{4(1 - \alpha \tilde{r}^3)^2 \sin^2 \lambda + (1 + 2\alpha \tilde{r}^3)^2 \cos^2 \lambda}$ .

Далее, считаем проекцию градиента на направление поля  $(\nabla B)_\parallel$ :

$$\begin{aligned} (\nabla B)_\parallel &= \frac{1}{B} \left( \frac{\partial B}{\partial r} B_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \lambda} B_\lambda \right) = \frac{3M^3 \sin \lambda}{B^2 C_{st}^{10} \tilde{r}^4} \times \\ &\times \left( \left( 4 \left( \alpha - \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \sin^2 \lambda - \left( \frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right) \cos^2 \lambda \right) \left( \frac{2}{\tilde{r}^3} - 2\alpha \right) + \cos^2 \lambda \left( 4\alpha - \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \left( 2\alpha + \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned} F_\parallel(\tilde{r}, \lambda, \alpha) &= 6\pi \sin \lambda \times \\ &\times \left( 2 \left( 4(\alpha \tilde{r}^3 - 1) \sin^2 \lambda - (1 + 2\alpha \tilde{r}^3) \cos^2 \lambda \right) (1 - \alpha \tilde{r}^3) + \cos^2 \lambda (4\alpha \tilde{r}^3 - 1) (2\alpha \tilde{r}^3 + 1) \right); \end{aligned}$$

тогда

$$(\nabla B)_{\parallel} = \frac{M^3 F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{2\pi B^2 C_{st}^{10} \tilde{r}^{10}} = \frac{M F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{2\pi \tilde{B}^2 C_{st}^4 \tilde{r}^4}. \quad (41)$$

Итак, (36) равносильно неравенству

$$\tilde{r} \leq \frac{\beta_2}{\sqrt{v_{\parallel}/v}} \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}. \quad (42)$$

Аналогично представим  $(\nabla B)_{\perp}$  в виде

$$(\nabla B)_{\perp} = \frac{M F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{C_{st}^4 \tilde{r}^4 \tilde{B}^2}, \quad (43)$$

где

$$F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha) = 3((4\alpha\tilde{r}^3 - 1)\sin^2 \lambda - (2\alpha\tilde{r}^3 + 1)\cos^2 \lambda)(2\alpha\tilde{r}^3 + 1) + 2\sin^2 \lambda \cos \lambda(1 - 4\alpha\tilde{r}^3)(1 - \alpha\tilde{r}^3).$$

Приходим к заключению, что (36) равносильно

$$\tilde{r} \leq \frac{\beta_1}{\sqrt{v_{\perp}/v}} \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}} \quad (44)$$

В дальнейшем будем использовать не неравенства (42) и (44), а достаточные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} \leq \beta_1 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}, \\ \tilde{r} \leq \beta_2 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}. \end{array} \right. \quad (45)$$

Пусть  $\Omega$  — область, задаваемая неравенствами (45), а  $C\Omega$  — дополнение к ней. В качестве заряженной частицы для определённости рассмотрим электрон с кинетической энергией  $E$ . Определим, при каких значениях  $E$  силовая линия суперпозиционного поля с заданным параметром  $r_e = 10R_z$ , вдоль которой движется ведущий центр электрона, целиком лежит в области  $\Omega$ . Именно в этом случае применимо уже полученное решение задачи о динамике ведущего центра частицы в суперпозиционном поле. Для этого построим области  $\Omega$ , соответствующие различным значениям энергии  $E$ . Положим  $B_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  Гс. На рис. 3 области  $\Omega$  и  $C\Omega$  ( $C\Omega$  — серого цвета) представлены для значений  $E$ , равных 8, 11.3 и 30 МэВ. Наряду с областями  $\Omega$  на каждом из рис. 3,  $a$ – $c$  изображена силовая линия суперпозиционного поля (отмечена чёрным цветом) с экваториальным параметром  $r_e = 10R_z$ . Результаты расчётов показывают, что при  $E < 11.3$  МэВ эта силовая линия полностью лежит в области  $\Omega$  (см. рис. 3,  $a$ ), при  $E \simeq 11.3$  МэВ она касается границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  (см. рис. 3,  $b$ ), в то время как при значениях  $E > 11.3$  МэВ она выходит из области  $\Omega$  (см. рис. 3,  $c$ ). Таким образом, в рассматриваемом случае выведенная квадратура  $\lambda(\varphi)$  имеет смысл при  $E < 11.3$  МэВ.

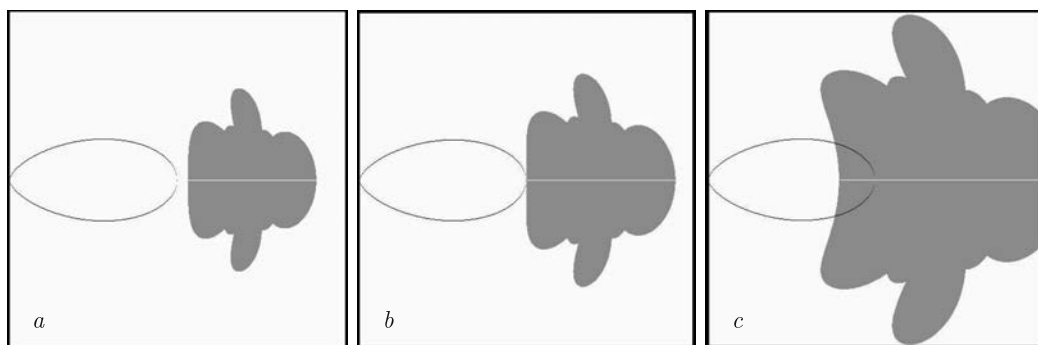


Рис. 3. Область  $\Omega$  и силовая линия суперпозиционного поля.  $a - E = 8$  МэВ,  $b - E = 11.3$  МэВ,  $c - E = 30$  МэВ.

**Заключение.** В настоящей статье приближение ведущего центра было применено к описанию динамики заряженной частицы, движущейся в поле, представляющем собой суперпозицию дипольного и однородного магнитного поля. Выведена квадратура, описывающая дрейф ведущего центра по силовой поверхности суперпозиционного поля. С использованием этой квадратуры построены зависимости широты от долготы, соответствующие различным направлениям начальной скорости частицы. Наконец, найдены значения энергии электрона, для которых полученное аналитическое решение описывает дрейф ведущего центра по силовой поверхности суперпозиционного поля.

#### Литература

1. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. Основные принципы. М.: Мир, 1967. 260 с.
2. Obayashi T. // Rep. Ionosph. and Res. Japan. Vol. 13. P. 201. 1959.
3. Lemaire J. F. The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowed regions // Space Res. Vol. 31, N 5. P. 1131–1153. 2003.
4. Шалимов В. П., Швачунов И. Н. Изучение движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, находящегося во внешнем магнитном поле, методом Штермера. I // Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 2. С. 208–220.
5. Ленерт Б. Динамика заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967. 351 с.
6. Колесников Е. К., Филиппов Б. В. Некоторые задачи эволюции заряженных частиц в поле магнитного диполя. Изд. ЛГУ, 1974. 72 с.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Сведения об авторах

Колесников Евгений Константинович — профессор; kolesnikov\_evg@mail.ru

Клюшников Георгий Николаевич — аспирант; gklyushnicov@yandex.ru

## THE PROBLEM CONCERNING THE GUIDING CENTER MOVEMENT IN THE SUPERPOSITION OF DIPOLE MAGNETIC FIELD AND UNIFORM MAGNETIC FIELD

*Evgeny K. Kolesnikov, Georgy N. Klyushnicov*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kolesnikov\_evg@mail.ru, gklyushnicov@yandex.ru

The problem of dynamics for the charged particle in the superposition of magnetic dipole field and uniform magnetic field, the latter being parallel to the magnetic moment of dipole, has been considered. This model is known to be used for the description of the Earth magnetic field within enough large distances from the Earth's center. The analytic solution for the problem of the drift for the charged particle guiding center along a dipole field power surface has been obtained before. It has been proved that the analytic solution of the drift problem can be found for a superpositional field too. Besides, the configurations of the weak local inhomogeneity regions, where the drift equations describe the guiding center movement correctly, have been represented. Besides, the configurations of the weak local inhomogeneity regions have been given, with the drift equations describing the guiding center movement correctly. The magnitudes of electron energies, for which the power surface of the superpositional field with the given equatorial parameter is included in the local inhomogeneity region of the magnetic field, have been determined. Refs 6. Figs 3.

*Keywords:* charged particles, magnetic field of the Earth, guiding center, drift equations, force lines.

### References

1. Alven G., Felthammar K.-G., *Cosmic electrodynamics. Main principles* (Mir, Moscow, 1967) [in Russian].
2. Obayashi T., *Rep. Ionosph. and Res. Japan.* **13**, 201 (1959).
3. Lemaire J.F., "The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowed regions", *J. Space Res.* **31**(5), 1131–1153 (2003).
4. Shalimov V.P., Shvachunov I.N., "Research of the charged particles movement in the field of a magnetic dipole, being in an extern magnetic field, by Shtormer's method. I", *J. Cosmic Res.* **IV**, ser. 2, 208–220 (1966) [in Russian].
5. Lenert B., *Dynamics of the charged particles* (Atomizdat, Moscow, 1967) [in Russian].
6. Kolesnikov E.K., Filippov B.V., *Some problems of charged particles evolution in the field of a magnetic dipole* (LGU, 1974) [in Russian].