УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

НОВЫЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ УПРАВЛЕНИЯ, ПЕРЕВОДЯЩЕГО СИСТЕМУ ИЗ ОДНОГО ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ В ДРУГОЕ

С. А. Зегжда, *Е. А. Шатров*, *М. П. Юшков*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В предыдущих работах авторов рассматривалась возможность применения теории движения неголономных систем со связями высокого порядка для решения одной из важнейших задач теории управления о переводе механической системы с конечным числом степеней свободы за заданное время из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние. Было показано, что при решении такой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина с минимизацией интеграла от квадрата управляющей силы в процессе движения системы непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка. Но в этом случае для решения поставленной задачи можно применить и обобщенный принцип Гаусса, свойственный движению неголономных систем со связями высокого порядка. Важно, что он позволяет найти управление в виде полинома, в то время как применение принципа максимума Понтрягина дает управление, содержащее гармоники с собственными частотами системы. Последнее обстоятельство определяет раскачку системы при длительном времени движения. Помимо этого обобщенный принцип Гаусса позволяет ставить и решать расширенные краевые задачи, когда наряду с условиями на обобщенные координаты и скорости в начале и в конце движения вводятся значения производных любых порядков от координат в эти же моменты времени. Это позволяет находить управления без скачков в начале и в конце движения. Представленная теория демонстрировалась на решении задачи об управлении горизонтальным движением тележки с маятниками. Подобная задача может рассматриваться как модельная, так как при соответствующем выборе параметров системы она становится эквивалентной задаче о гашении колебаний заданного упругого тела, некоторое сечение которого должно за заданное время переместиться на заданное расстояние. Эквивалентность этих двух задач существенно расширяет круг возможных приложений задачи о тележке с маятниками.

Ранее решение задачи сводилось к выбору оптимальной горизонтальной силы. В представленной работе предлагается отыскивать в виде функции времени не силу, которая приложена к тележке, а ускорение тележки, при котором она за заданное время переместится на заданное расстояние при отсутствии скоростей и ускорений тележки и маятников в начале и в конце пути. В этой новой задаче углы поворота маятников являются главными координатами. Это позволяет по разработанной ранее процедуре на основе обобщенного принципа Гаусса определить искомое ускорение тележки. Зная движение тележки и маятников, легко определить и искомую управляющую силу. Приводятся результаты численных расчетов. Библиогр. 11 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: управление движением, управляющая сила, принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, расширенная краевая задача.

1. Введение. Одной из центральных задач теории управления является задача об оптимальном переходе механической системы за заданное время из одного фазового состояния, в котором заданы обобщенные координаты и скорости, в другое фазовое состояние, в котором система должна иметь требуемые обобщенные координаты и скорости. В частности, если рассматриваемая механическая система в исходном и конечном состояниях покоится, говорят о гашении колебаний. Среди методов оптимального решения таких задач Н. Н. Моисеев [1] выделяет принцип максимума Понтрягина [2] и теорию локальных экстремумов Ф. Л. Черноусько [3]. К ним полезно добавить и метод динамического программирования Р. Беллмана [4].

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.212

Модельной для исследования этой проблемы можно считать задачу о гашении колебаний горизонтально перемещающейся тележки с s маятниками, которая за заданное время должна пройти заданный путь в предположении, что в начале и в конце пути углы поворота маятников, их скорости, а также скорость тележки равны нулю. В ряде предыдущих работ авторов для решения подобных задач было предложено использовать аппарат неголономной механики со связями высокого порядка. Дело в том, что при решении такой задачи классическим методом, использующим принцип максимума Понтрягина [2] при минимизации квадрата управляющей силы [5], было замечено, что в процессе движения тележки с s маятниками непрерывно выполняется неголономная связь порядка $2s + 4$. Это наталкивает на мысль о том, что для решения подобной задачи целесообразно использовать теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка. Применение обобщенного принципа Гаусса [6], свойственного этой теории, позволило добиться более плавного движения, чем движение, полученное при использовании принципа максимума Понтрягина. Это объясняется тем, что обобщенный принцип Гаусса позволяет находить управление в виде полинома, в то время как принцип максимума Понтрягина дает управление, содержащее гармоники с собственными частотами системы. При длительном движении это вводит систему в резонанс. Помимо этого обобщенный принцип Гаусса позволяет ставить и решать расширенную краевую задачу, когда указываются значения в начале и в конце движения не только обобщенных координат и скоростей, но и прозводных от обобщенных координат по времени любого порядка. В частности, в случае приравнивания нулю ускорений в начале и в конце пути движения тележки удается найти управление без скачков этой функции. Эти результаты были подытожены в статье [7].

В данной работе для решения этой же задачи предлагается использовать новый подход для нахождения управления. Его идея состоит в том, что отыскивается не управляющая сила, приложенная к тележке, а ускорение тележки, обеспечивающее оптимальное решение задачи. После нахождения этого ускорения может быть определена и горизонтальная сила, приложенная к тележке.

Отметим, что к идее отыскания управления в виде полинома, опираясь на метод интегродифференциальных соотношений, пришли также Г. В. Костин и В. В. Саурин [8, 9]. Помимо них подобными задачами активно занимается и М. А. Чуев [10].

2. Постановка задачи и классический подход к решению задачи о гашении колебаний. Рассмотрим горизонтальное движение тележки массы m, несущей два маятника, массы которых m_1, m_2 и длины l_1, l_2 соответственно (рис. 1). Для описания движения системы введем горизонтальное перемещение тележки x и углы поворота маятников φ_1 и φ_2. Решается задача о гашении колебаний, когда отыскивается горизонтальная управляющая сила F, перемещающая за заданное время $\widetilde{T}$ тележку на расстояние S, причем механическая система должна перейти из первоначального состояния покоя в новое состояние покоя. Для этого должны выполняться следующие краевые условия:

$$\begin{gathered}
\varphi_1(0) = \varphi_1(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_1(\widetilde{T}) = 0\,, \\
\varphi_2(0) = \varphi_2(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot\varphi_2(0) = \dot\varphi_2(\widetilde{T}) = 0\,, \qquad (2.1) \\
x(0) = \dot x(0) = \dot x(\widetilde{T}) = 0\,, \quad x(\widetilde{T}) = S\,.
\end{gathered}$$

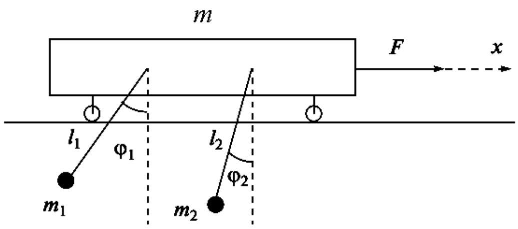

Рис. 1. Тележка с двумя маятниками.

Дифференциальные уравнения движения системы в линейной постановке имеют вид

$$\begin{gathered}(m_1+m_2+m)\ddot{x}-m_1l_1\ddot{\varphi}_1-m_2l_2\ddot{\varphi}_2=F\,,\\ l_1\ddot{\varphi}_1+\mathrm{g}\varphi_1=\ddot{x}\,,\\ l_2\ddot{\varphi}_2+\mathrm{g}\varphi_2=\ddot{x}\,,\end{gathered}\tag{2.2}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Ясно, что первое уравнение выражает закон движения центра масс рассматриваемой механической системы:

$$M\ddot{x}_c=F\,,\quad x_c=x-\frac{m_1l_1\varphi_1}{M}-\frac{m_2l_2\varphi_2}{M}\,,\quad M=m_1+m_2+m\,.$$

В свою очередь второе и третье уравнения системы (2.2) можно записать в виде

$$\begin{gathered}(1-\beta)\ddot{\varphi}_1-\gamma\alpha\ddot{\varphi}_2+k^2\varphi_1=\frac{F}{Ml_1}\,,\\ -\beta\ddot{\varphi}_1+\alpha(1-\gamma)\ddot{\varphi}_2+k^2\varphi_2=\frac{F}{Ml_1}\,,\end{gathered}\tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$\alpha=\frac{l_2}{l_1}\,,\quad \beta=\frac{m_1}{M}\,,\quad \gamma=\frac{m_2}{M}\,,\quad k^2=\frac{\mathrm{g}}{l_1}\,.$$

Главные формы колебаний и собственные частоты для однородной системы, соответствующей неоднородным уравнениям (2.3), получаем из системы

$$\begin{gathered}\left(k^2-(1-\beta)\Omega^2\right)C_1+\gamma\alpha\Omega^2C_2=0\,,\\ \beta\Omega^2C_1+\left(k^2-\alpha(1-\gamma)\Omega^2\right)C_2=0\,.\end{gathered}$$

Собственные частоты можно представить в виде

$$\Omega_j=k\lambda_j\,,\quad j=1,2\,,\quad \lambda_{1,2}^2=\frac{1+\alpha-\beta\mp\alpha\gamma\sqrt{(1+\alpha\beta-\alpha\gamma)^2-4\alpha(1-\beta-\gamma)}}{2\alpha(1-\beta-\gamma)}\,.$$

Обозначая главные координаты для системы (2.3) через $x_1,\ x_2$, выразим углы отклонений маятников через них следующим образом:

$$\varphi_1=-\frac{1}{a_1-a_2}\left((1+a_2)\lambda_1^2x_1-(1+a_1)\lambda_2^2x_2\right)\,,$$

$$\varphi_2=\frac{1}{\alpha\gamma(a_1-a_2)}\left((1+a_2)\left(1-(1-\beta)\lambda_1^2\right)x_1-(1+a_1)\left(1-(1-\beta)\lambda_2^2\right)x_2\right)\,.$$

Здесь

$$a_j = \frac{\beta \lambda_j^2}{1 - \alpha(1-\gamma)\lambda_j^2}\,, \quad j = 1,2\,.$$

Вводя еще одну главную координату x_0 и безразмерное время τ по формулам

$$x_0 = \frac{x_c}{l_1}\,, \quad \tau = \Omega_1 t\,,$$

перепишем дифференциальные уравнения движения в главных координатах:

$$\begin{gathered} x_0'' = u\,, \\ x_j'' + \omega_j^2 x_j = u\,, \quad j = 1,2\,, \\ u = \frac{F}{M\mathrm{g}\lambda_1^2}\,, \quad \omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega_1}\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь штрихами обозначаются производные по безразмерному времени τ. Систему дифференциальных уравнений (2.4) будем решать при краевых условиях

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = x_0''(0) = 0\,, \quad x_j(0) = x_j'(0) = 0\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}\,, \quad x_0'(T) = x_0''(T) = 0\,, \quad x_j(T) = x_j'(T) = 0\,, \quad j = 1,2\,, \end{gathered} \tag{2.5}$$

т. е. по отношению к формулам (2.1) ставится расширенная краевая задача, в которой дополнительно требуется обращение в нуль ускорений центра масс в начале и в конце движения.

Система (2.4) является системой дифференциальных уравнений шестого порядка, а формулами (2.5) ставятся четырнадцать краевых условий. Поэтому согласно теории, изложенной в статье [7], требуется использовать обобщенный принцип Гаусса восьмого порядка, который обеспечивает нахождение безразмерного управления u из дифференциального уравнения восьмого порядка

$$\overset{(8)}{u} = 0\,.$$

По рекомендации П. Е. Товстика будем отыскивать управление u в виде

$$u(\tau) = \sum_{j=1}^{6} c_j \tau^j (T - \tau)\,,$$

что облегчает вычисление произвольных постоянных при удовлетворении краевым условиям. Определив управление u, можем найти главные координаты x_0, x_1 и x_2 по формулам

$$\begin{gathered} x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)\, d\tau_1\,, \\ x_j(\tau) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^\tau u(\tau_1) \sin \omega_j (\tau - \tau_1)\, d\tau_1\,, \quad j = 1,2\,. \end{gathered}$$

3. Новый подход к задаче о гашении колебаний. В рассмотренной задаче о гашении колебаний тележки с маятниками искомой управляющей силой является горизонтальная сила, приложенная к тележке. Отметим, что задача о тележке с маятниками при соответствующем выборе их длин и масс становится эквивалентной задаче о гашении колебаний упругого тела, некоторое сечение которого должно за заданное время переместиться на заданное расстояние. Эквивалентность этих двух задач существенно расширяет круг возможных приложений задачи о тележке с маятниками. Рассмотренное выше решение предполагало необходимость нахождения собственных частот и собственных форм колебаний, чтобы осуществить переход к главным координатам и записать систему в виде (2.4).

Предложим новый, более простой подход к решению задачи, который позволяет избежать определения собственных частот и собственных форм колебаний данной механической системы. Обратим внимание на то, что эти частоты и формы существенно зависят от массы тележки, в то время как сама проблема о гашении колебаний маятников зависит только от того, насколько целесообразно выбран закон перемещения тележки. Учитывая это важное обстоятельство, первоначально будем искать как функцию времени не силу F, которая приложена к тележке, а ускорение тележки $\ddot{x}$, при котором она за заданное время $\widetilde{T}$ переместится на заданное расстояние S при отсутствии скоростей и ускорений тележки и маятников в начале и в конце пути.

При такой постановке задачи вместо системы дифференциальных уравнений (2.2) естественным образом записываем систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= U\,, \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + \mathrm{g}\varphi_1 &= U\,, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{g}\varphi_2 &= U\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где через U обозначено искомое размерное ускорение тележки. Интересно, что полученная система является системой независимых уравнений, т. е. смещение тележки и углы поворотов маятников оказались главными координатами.

Если теперь ввести безразмерные координаты, управление и время по формулам

$$\bar{x}_0 = \frac{x}{l_1}\,, \quad \bar{x}_1 = \varphi_1\,, \quad \bar{x}_2 = \alpha\varphi_2\,, \quad u_* = \frac{U}{\mathrm{g}}\,, \quad \bar{\tau} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{l_1}}\,t\,,$$

система уравнений (3.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_0'' &= u_*\,, \\ \bar{x}_1'' + \bar{x}_1 &= u_*\,, \\ \bar{x}_2'' + \frac{1}{\alpha}\,\bar{x}_2 &= u_*\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где штрихами обозначены производные по безразмерному времени $\bar{\tau}$, а u_* является искомым безразмерным ускорением тележки в долях g, отыскиваемым при новом подходе.

Полученная система (3.2) практически не отличается от системы (2.4). Это позволяет по разработанной выше процедуре на основе обобщенного принципа Гаусса определить искомое ускорение тележки и движение маятников. После этого, зная движение тележки и маятников, легко определим и искомую управляющую силу. Размерная горизонтальная управляющая сила F_N, получаемая по предложенному новому подходу, будет вычисляться по формуле

$$F_N = M\mathrm{g}u_* - m_1\mathrm{g}\bar{x}_1'' - m_2\mathrm{g}\bar{x}_2''\,,$$

а соответствующее ей новое безразмерное управление u_N, выраженное в долях $M\mathrm{g}$, запишется в виде

$$u_N \equiv \frac{F_N}{M\mathrm{g}} = u_* \,(1-\beta-\gamma) + \beta\,\bar{x}_1 + \frac{\gamma}{\alpha}\,\bar{x}_2\,.$$

4. Построение аналитического решения. Итак, получили безразмерное управление. Однако оказывается, что искомое ускорение тележки в безразмерных переменных при заданных длинах и массах маятников зависит от одного безразмерного параметра $K = T/T_1$, т. е. от отношения безразмерного времени перемещения тележки к безразмерному периоду колебаний наиболее длинного маятника. В работе [11] показано, что при любом числе маятников имеется счетное число особых значений параметра K, при приближении к которым ускорение тележки неограниченно возрастает.

Определить управление движением тележки, которое является аналитической функцией времени при всех значениях параметра K, предлагается следующим образом. Строится новое решение рассматриваемой задачи. При его построении дополнительно предполагается, что в начале и в конце пути производная от ускорения тележки по времени равна нулю. У нового решения задачи также будут существовать особые значения параметра K, но они будут отличны от особых значений исходного решения. Пусть управление $u_1(\tau)$ соответствует первому решению, а $u_2(\tau)$ — второму. Тогда при любых значениях параметра μ функция

$$u(\tau) = u_1(\tau) + \mu(u_2(\tau) - u_1(\tau))$$

будет решением рассматриваемой задачи. Избежать вычисления особых значений решений u_1 и u_2 и построить аналитическое решение, непрерывно зависящее от параметра K, позволяет определение параметра μ из условия минимальности интеграла от квадрата функции $u(\tau)$ за время перемещения T. Это решение соответствует следующему значению параметра μ:

$$\mu = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_3 - 2J_2}\,,$$

где

$$J_1 = \int_0^T u_1^2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_2 = \int_0^T u_1(\tau)u_2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_3 = \int_0^T u_2^2(\tau)\,d\tau\,.$$

5. Результаты численных расчетов. Результаты численных расчетов, полученные по старому и по новому подходам для движения тележки с маятниками, сравнивались между собой. Вычислялись как функции времени управляющая сила F и углы поворотов маятников. Сила выражалась в долях $M\mathrm{g}$, где M — масса всей системы, а углы поворотов φ_1 и φ_2 — в градусах. Как отмечалось выше, данные функции, определенные как функции безразмерного времени $\tau = t/\widetilde{T}$, существенно зависят от параметра K, равного отношению безразмерного времени перемещения T к периоду T_1 первой формы колебаний механической системы. Интересным является случай, когда величина K находится в промежутке от единицы до двух [11]. С учетом этого при расчетах полагалось, что K=1.54. Так как отыскиваемые функции пропорциональны перемещению тележки S за время $\widetilde{T}$, данное перемещение, заданное в долях длины

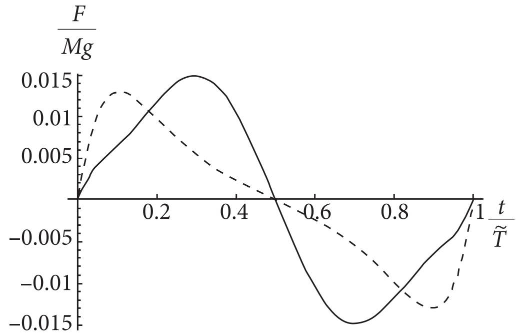

Рис. 2. Управляющая сила для тележки с одним маятником.

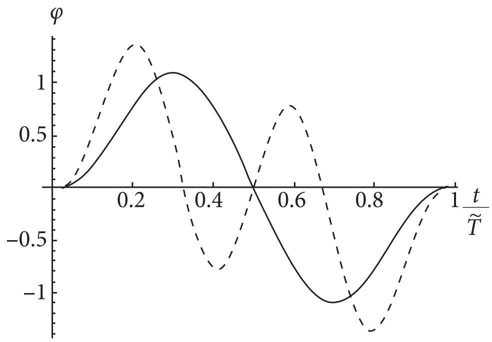

Рис. 3. Колебания маятника на тележке.

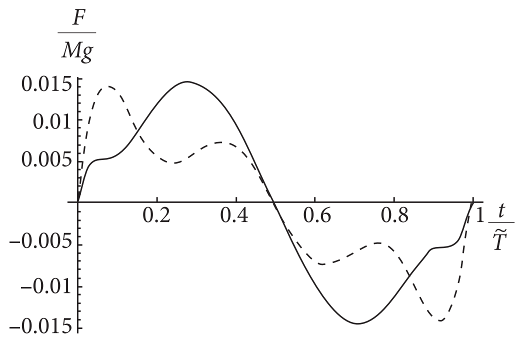

Рис. 4. Управляющая сила для тележки с двумя маятниками (случай $m_2/m_1 = 1/8$).

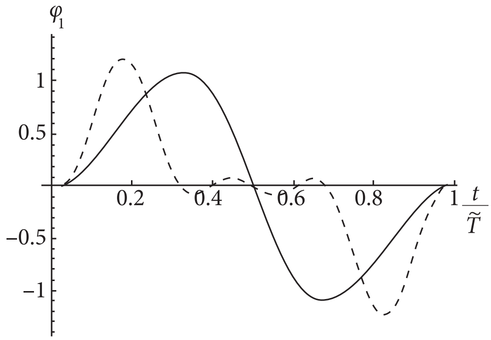

Рис. 5. Колебания первого маятника.

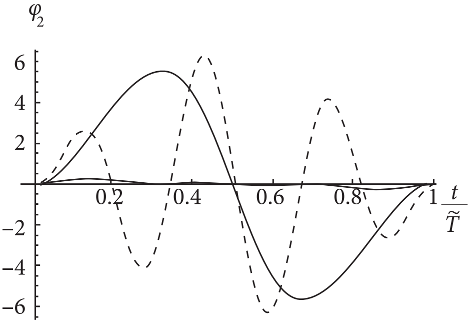

Рис. 6. Колебания второго маятника.

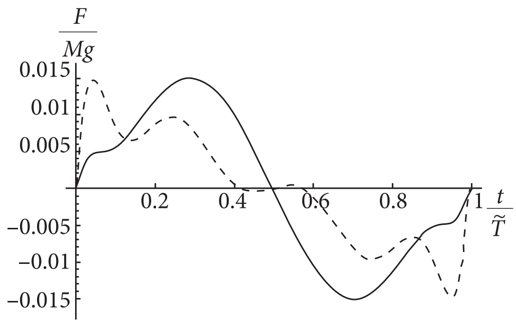

Рис. 7. Управляющая сила для тележки с двумя маятниками (случай $m_2/m_1 = 1/64$).

первого, наиболее длинного маятника, выбиралось так, чтобы углы поворота маятников были не больше десяти градусов. На рис. 2–7 сплошные линии соответствуют результатам, полученным по новому подходу, а пунктирные — по старому.

Рис. 2 и 3 соответствуют расчету, когда на тележке укреплен один маятник, при этом выбирались следующие параметры системы:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{1}{2}\,, \quad K = 1.54\,, \quad S = \frac{l}{5}\,.$$

Рис. 4–7 соответствуют движению тележки с двумя маятниками. В этом случае имеем четыре независимых параметра: K, отношения массы тележки m к массе m_1 первого маятника и к массе m_2 второго маятника, а также отношение длины l_2 второго маятника к длине l_1 первого. Рис. 4–6 соответствуют параметрам системы

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{8}\,, \quad \frac{m}{m_1} = \frac{1}{2}\,, \quad K = 1.54\,, \quad S = \frac{l_1}{5}\,,$$

а для рис. 7 принято

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{64}\,.$$

Расчеты, как и следовало ожидать, показали, что чем больше масса тележки по отношению к массе маятников, тем ближе результаты, полученные по первому и по второму подходам. Поэтому полагалось, что масса тележки в два раза меньше массы первого основного маятника. Длина же второго маятника и его масса по отношению к первому принимались меньшими соответственно в четыре и в восемь раз. Перемещение тележки равно $0.2\,l_1$, где l_1 — длина основного маятника. Видим, что применение нового подхода дает уменьшение колебаний маятников и по амплитуде, и по частоте. Из сравнения рис. 4 и 2 следует, что при новом подходе добавление второго маятника незначительно повлияло на управляющую силу, в то время как при обычном подходе она существенно изменилась. Интересным является и следующий результат. Пусть в задаче с двумя маятниками масса второго меньше первого не в восемь, а в шестьдесят четыре раза. Сравнивая рис. 7 и 4 видим, что при новом подходе такое существенное уменьшение массы второго маятника мало повлияло на управляющую силу, в то время как при обычном подходе она изменилась заметно.

Литература

1. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
3. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.
4. *Беллман Р.* Динамическое програмирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
6. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.
7. *Юшков М. П., Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Пашкина А. А.* О связи теории управления с неголономной механикой // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59), вып. 4. С. 609–618.
8. *Костин Г. В., Саурин В. В.* Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады академии наук. 2005. Т. 404, № 5. С. 628–631.
9. *Костин Г. В., Саурин В. В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады академии наук. 2006. Т. 408, № 6. С. 750–753.
10. *Чуев М. А.* Дифференциальные уравнения програмных движений механической системы // Изв. РАН. 2008. № 1. С. 179–192.
11. *Гаврилов Д. Н., Зегжда С. А.* Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 73–83.

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2015 г.

Сведения об авторах

Зегжда Сергей Андреевич — доктор физико-математических наук, профессор (1935–2015)

Шатров Егор Александрович — аспирант; egorshatroff@yandex.ru

Юшков Михаил Петрович — доктор физико-математических наук, професcор; yushkovmp@mail.ru

A NEW APPROACH TO FINDING THE CONTROL TRANSPORTING A SYSTEM FROM ONE PHASE STATE TO ANOTHER

Sergey A. Zegzhda†*, Egor A. Shatrov, Mikhail P. Yushkov*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; egorshatroff@yandex.ru, yushkovmp@mail.ru

In their previous papers the authors have considered a possibility of application of the theory of motion for nonholonomic systems with high-order constraints to solving one of the main problems of the control theory. This is a problem of transporting a mechanical system with the finite number of degrees of freedom from a given phase state to another given phase state during a fixed time. It was shown that when solving such a problem using the Pontryagin maximum principle with minimization of the integral of the control force squared, a nonholonomic high-order constraint is realized continuously during the motion of the system. But in this case, one can also apply a generalized Gauss principle, which is commonly used in the motion of nonholonomic systems with high-order constraints. It is essential that the latter principle makes it possible to find the control as a polynomial, while the use of the Pontryagin maximum principle yields the control containing harmonics with natural frequencies of the system. The latter fact determines increasing the amplitude of oscillation of the system if the time of motion is long. Besides this, a generalized Gauss principle allows us to formulate and solve extended boundary problems in which along with the conditions for generalized coordinates and velocities at the beginning and at the end of motion, the values of any-order derivatives of the coordinates are introduced at the same time instants. This makes it possible to find the control without jumps at the beginning and at the end of motion. The theory presented has been demonstrated when solving the problem of the control of horizontal motion of a trolley with pendulums. A similar problem can be considered as a model, since when the parameters are chosen correspondingly it becomes equivalent to the problem of suppression of oscillations of a given elastic body some cross-section of which should move by a given distance in a fixed time. Equivalence of these problems widens essentially a range of possible applications of the problem of a trolley with pendulums.

Earlier solving the problem has been reduced to the choice of a horizontal force that is a solution of the problem formulated. In the present paper it is offered to seek an acceleration of a trolley, with which it moves by a given distance in a fixed time, as a time function but not a force applied to the trolley, the velocities and accelerations being equal to zero at the beginning and at the end of motion. In this new problem the rotation angles of pendulums are the principal coordinates. This makes it possible to find a sought acceleration of a trolley on the basis of a generalized Gauss principle according to the technique developed before. Knowing the motion of a trolley and pendulums it is easy to determine the required control force. The results of numerical calculation are presented. Refs 11. Figs 7.

Keywords: control of motion, control force, Pontryagin maximum principle, generalized Gauss principle, extended boundary problem.

References

1. Moiseev N. N., Ivanilov Yu. P., Stolyarova E. M., *Optimization methods* (Nauka, Moscow, 1978, 352 p.) [In Russian].

2. Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., *Mathematical theory of optimal processes* (Nauka, Moscow, 1983, 392 p.) [In Russian].

3. Chernous'ko F. L., Banichuk N. V., *Variational problems in mechanics and control. Numerical methods* (Nauka, Moscow, 1973, 238 p.) [In Russian].

4. Bellman R., *Dynamic programming* (Princeton Univ. Press, 2010, 392 p.).

5. Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N., *Control of oscillation* (Nauka, Moscow, 1980, 384 p.) [In Russian].

6. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., "Generalization of the Gauss principle to the case of nonholonomic high-order systems", *Dokl. AN. SSSR* **269**(6), 1328–1330 (1983) [In Russian].

7. Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Pashkina A. A., "On relationship between the control theory and nonholonomic mechanics", *Vestnik Saint-Petersburg University. Mathematics* **47**, Issue 4, 181–188 (2014).

8. Kostin G. V., Saurin V. V., "Integrodifferential approach to solving problems of linear elasticity theory", *Doklady Physics* **50**(10), 535–538 (2005).

9. Kostin G. V., Saurin V. V., "Modeling and optimization of elastic system motion by the method of integrodifferential relations", *Doklady Mathematics* **73**(3), 469–472 (2006).

10. Chuev M. A., "Differential equations for program motion of a mechanical system", *Mech. Solids* **43**(1), 153–164 (2008).

11. Zegzhda S. A., Gavrilov D. N., "Suppression of vibration of an elastic body when it moves", *Vestn. St.Petersb. un-ta. Ser. 1*, Issue 3, 73–83 (2012) [In Russian].