УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

СТРОЕНИЕ ОТДЕЛИМЫХ АЛГЕБР ДЫНКИНА

С. С. Валландер

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье изучаются абстрактные алгебры Дынкина. Такие алгебры образуют полезный инструмент для обсуждения вероятностей в достаточно естественном контексте. Абстрактность означает отсутствие теоретико-множественной структуры элементов таких алгебр. Вводится полезный широкий класс абстрактных алгебр — отделимые алгебры Дынкина и указывается простейший пример неотделимой алгебры. Свойство отделимости позволяет определить подходящие варианты булевых версий операций пересечения и объединения элементов. Такие операции в общем случае определены только частично. Доказываются некоторые свойства отделимых алгебр, которые используются для получения стандартных свойств пересечения и объединения, включая ассоциативность и дистрибутивность, в случае, когда соответствующие операции применимы. Установленные факты позволяют определить булевы подалгебры в отделимой алгебре Дынкина и проверить совпадение нашей версии определения с обычной.

Наконец, формулируется и доказывается основной результат о строении отделимых алгебр Дынкина, которые представляются как теоретико-множественное объединение максимальных булевых подалгебр. После ранее проведенной подготовки проводится доказательство при помощи стандартного применения леммы Цорна. Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: абстрактные алгебры Дынкина, булевы операции, отделимые алгебры Дынкина.

1. Введение. Заметка является продолжением [1] и [2]. В работе [2] определены абстрактные алгебры Дынкина, установлены некоторые их свойства и доказана теорема о продолжении вероятности с абстрактной алгебры Дынкина на ее свободное расширение. В то же время в [1] отмечено, что классическая алгебра Дынкина (термин «алгебра Дынкина» в [1] еще не использовался) представляется как объединение своих максимальных подалгебр (подалгебра понимается как обычная алгебра множеств). Основной целью настоящей статьи является доказательство (при естественных ограничениях) аналогичного результата для абстрактных алгебр Дынкина.

Предварительно мы обсуждаем возможность разумного введения булевых операций в абстрактной алгебре Дынкина. Такое определение оказывается возможным для широкого класса алгебр Дынкина, которые мы называем *отделимыми*.

После этого формулируется основной результат заметки — отделимая алгебра Дынкина является объединением своих максимальных булевых подалгебр.

Идеи, ведущие к алгебрам Дынкина, можно проследить с давних времен (см., например, [3–5]).

Напомним определение абстрактной алгебры Дынкина (см. [2]).

Пусть $\mathcal{A}$ — частично упорядоченное отношением $\leq$ («включение») множество с минимальным элементом 0 и максимальным элементом 1. Предположим также, что на $\mathcal{A}$ задано симметричное бинарное отношение $\perp$ («дизъюнктность»), обладающее следующими свойствами:

(D1) для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $0 \perp A$;

(D2) если справедливо $A \perp 1$, выполняется $A = 0$;

(DI) если справедливо $A_1 \leq A_2$ и $A_2 \perp B$, выполняется $A_1 \perp B$ (монотонность дизъюнктности).

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.304

Будем называть $\mathcal{A}$ *абстрактной алгеброй Дынкина*, если на $\mathcal{A}$ заданы две частичные операции (сложение и вычитание): $A+B$ для $A\perp B$ и $B-A$ для $A\le B$, удовлетворяющие свойствам (для краткости соответствующие кванторы всеобщности опущены):

(A1) $A+B=B+A$ (коммутативность сложения);

(A2) если A_1, A_2, A_3 попарно дизъюнктны, выполняется $A_1+A_2\perp A_3$ и $(A_1+A_2)+A_3=A_1+(A_2+A_3)$ (ассоциативность сложения);

(A3) $0+A=A$;

(A4) если справедливо $A_1\le B$, $A_2\le B$ и $A_1\perp A_2$, выполняется $A_1+A_2\le B$ (ограниченность сложения);

(A5) если справедливо $A_1\le A_2$ и $A_2\perp B$, выполняется $A_1+B\le A_2+B$ (монотонность сложения);

(A6) если справедливо $A_1+B\le A_2+B$, выполняется $A_1\le A_2$ (сократимость по сложению);

(AS) если справедливо $A\le B$, выполняется $B-A\le B$, $B-A\perp A$ и $A+(B-A)=B$ (взаимная обратность вычитания и сложения).

Некоторые полезные следствия из этих аксиом доказаны в [2].

2. Отделимые алгебры Дынкина. Мы начнем с некоторых подготовительных утверждений относительно абстрактных алгебр Дынкина.

Лемма 1. *Пусть имеем* $A_1=C+B_1$ *и* $A_2=C+B_2$, *причем* $A_1\perp A_2$. *Тогда выполняется* $C=0$.

Доказательство. Из монотонности сложения вытекает $C\le C+B_1$. Тогда из монотонности дизъюнктности (DI) получаем $C\perp C+B_2$. Поскольку еще выполняется $C\le C+B_2$, снова по аксиоме (DI) получаем $C\perp C$. Применяя ограниченность сложения (A4), находим $C+C\le C$. Теперь из сократимости (A6) следует $C\le 0$, т. е. $C=0$.

Лемма 2. *Предположим, что выполняется* $A_1\perp A_2$ *и элемент* $X\in\mathcal{A}$ *удовлетворяет соотношениям* $X\le A_1$ *и* $X\le A_2$. *Тогда справедливо* $X=0$.

Это утверждение вытекает из леммы 1 и аксиомы (AS).

Лемма 3. *Пусть имеем неравенства* $B\le A$, $C\le A$ *и* $C\perp A-B$. *Тогда справедливо* $C\le B$.

Доказательство. По аксиоме (AS) имеем $A-B\le A$ и $A=B+(A-B)$. Применяя ограниченность сложения (A4) к C и $A-B$, получаем

$$C+(A-B)\le A=B+(A-B).$$

Остается сократить на $A-B$.

Следствие из леммы 3. *Если имеет место* $C\perp 1-B$, *выполняется* $C\le B$.

Определение 1. Элемент $B\in\mathcal{A}$ назовем *булевым пересечением* A_1 и A_2 ($B=A_1\wedge A_2$), если справедливы соотношения $B\le A_1$, $B\le A_2$ и $A_1-B\perp A_2-B$.

Лемма 4. *Если булево пересечение существует, оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что B и C удовлетворяют свойствам булева пересечения:

$$B\le A_1,\quad B\le A_2,\quad A_1-B\perp A_2-B,$$

$$C\le A_1,\quad C\le A_2,\quad A_1-C\perp A_2-C.$$

Достаточно показать $C\le B$.

Проверим сначала $A_1 \perp A_2 - B$. Действительно, $A_1 - B$, B, $A_2 - B$ попарно дизъюнктны (используем (AS)). Поэтому ассоциативность сложения (A2) дает

$$A_1 = (A_1 - B) + B \perp A_2 - B.$$

Поскольку справедливо $C \le A_1$ и $A_1 \perp A_2 - B$, получаем $C \perp A_2 - B$ (аксиома (DI)). Применяя к элементам C и B (оба они $\le A_2$) лемму 3, получаем требуемое $C \le B$.

Из определения и доказанной единственности с очевидностью следует $A \wedge A = A$.

Определение 2. Элементы $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ назовем *слабо дизъюнктными*, если из соотношений $X \le A_1$ и $X \le A_2$ вытекает $X = 0$.

Лемма 2 утверждает, что дизъюнктные элементы слабо дизъюнктны.

Определение 3. Назовем алгебру Дынкина *отделимой*, если в ней дизъюнктность совпадает со слабой дизъюнктностью.

Простейший пример неотделимой алгебры Дынкина получается следующим образом. Ее элементами являются $0, 1, A_1, A_2, 1 - A_1, 1 - A_2$. При этом включение и дизъюнктность тривиальны: $0 \le A_i \le 1$, $0 \le 1 - A_i \le 1$ $(i = 1, 2)$; $(\forall X) 0 \perp X$; $A_i \perp 1 - A_i$ $(i = 1, 2)$. Отделимость означала бы $A_1 \perp A_2$ (в этом случае имеем $A_1 = 1 - A_2$ и $A_2 = 1 - A_1$).

Пример показывает, что отсутствие отделимости приводит к появлению различных элементов, обладающих тем свойством, что совокупности включенных в них элементов одинаковы. Этим и объясняется термин.

Теорема 1. *Пусть алгебра Дынкина $\mathcal{A}$ отделима. Предположим, что булево пересечение элементов A_1 и A_2 существует, а элемент $K \in \mathcal{A}$ удовлетворяет неравенствам $K \le A_1$ и $K \le A_2$. Тогда выполняется $K \le A_1 \wedge A_2$.*

Доказательство. Обозначим для краткости $B = A_1 \wedge A_2$. Выберем элемент X, удовлетворяющий неравенствам $X \le A_1 - B$ и $X \le K$. Поскольку по определению булева пересечения выполнено $A_1 - B \perp A_2 - B$, из неравенства $X \le A_1 - B$ вытекает $X \perp A_2 - B$ (монотонность дизъюнктности (DI)). Поскольку имеем $K \le A_2$, по транзитивности выполняется $X \le A_2$.

Теперь, используя ограниченность сложения (A4), из соотношений $X \le A_2$, $A_2 - B \le A_2$, $X \perp A_2 - B$ получаем

$$X + (A_2 - B) \le A_2 = (A_2 - B) + B.$$

Сокращение дает $X \le B$. Теперь из соотношений $X \le B$, $X \le A_1 - B$ по лемме 2 получаем $X = 0$. Из определения отделимой алгебры Дынкина заключаем $A_1 - B \perp K$. Применяя ограниченность сложения (A4), находим

$$K + (A_1 - B) \le A_1 = B + (A_1 - B).$$

Сокращение дает требуемый результат $K \le B$.

3. Свойства отделимых алгебр Дынкина. Докажем еще некоторые свойства отделимых алгебр Дынкина, полезные для определения их строения.

Лемма 5. *Предположим, что булево пересечение $A \wedge B$ определено. Тогда $A - (A \wedge B)$ является булевым пересечением A и $1 - B$.*

Доказательство. Очевидно $A - (A \wedge B) \le A$. Проверим $A - (A \wedge B) \le 1 - B$. По определению булева пересечения имеем

$$A - (A \wedge B) \perp B - (A \wedge B).$$

Согласно аксиоме (AS) выполняется $A-(A\wedge B)\perp A\wedge B$ и $B-(A\wedge B)\perp A\wedge B$. Поэтому по ассоциативности сложения (A2) получаем

$$(A\wedge B)+(B-(A\wedge B))\perp A-(A\wedge B),$$

т. е.

$$B\perp A-(A\wedge B).$$

Согласно следствию из леммы 3 справедливо

$$A-(A\wedge B)\leq 1-B.$$

Остается проверить

$$A-(A-(A\wedge B))\perp(1-B)-(A-(A\wedge B)).$$

По свойству ассоциативности (см. свойство 7 в [2]) имеем

$$A-(A-(A\wedge B))=A\wedge B\leq B.$$

С другой стороны, выполняется

$$(1-B)-(A-(A\wedge B))\leq 1-B.$$

Таким образом, интересующие нас элементы содержатся в дизъюнктных B и $1-B$ соответственно. По монотонности дизъюнктности (DI) они и сами дизъюнктны, что и требовалось доказать.

Отметим еще, что лемма 5 дает нам формулу

$$A\wedge(1-B)=A-(A\wedge B). \qquad (*)$$

Лемма 6. *Если булевы пересечения* $(A_1\wedge A_2)\wedge A_3$ *и* $A_1\wedge(A_2\wedge A_3)$ *определены, они равны.*

Доказательство. Обозначим $C=(A_1\wedge A_2)\wedge A_3$. По монотонности имеем $C\leq A_i$ $(i=1,2,3)$. Пусть K — элемент, удовлетворяющий аналогичным соотношениям $K\leq A_i$ $(i=1,2,3)$. Применяя дважды теорему 1, получаем последовательно $K\leq A_1\wedge A_2$ и $K\leq(A_1\wedge A_2)\wedge A_3=C$. Возьмем в качестве K элемент $A_1\wedge(A_2\wedge A_3)$ и получим

$$A_1\wedge(A_2\wedge A_3)\leq(A_1\wedge A_2)\wedge A_3.$$

Тогда по симметрии они должны быть равны.

Лемма 7. *Если справедливо* $A\leq B$, *выполняется* $A\wedge C\leq B\wedge C$.

Доказательство. Поскольку имеем $A\wedge C\leq A\leq B$ и $A\wedge C\leq C$, достаточно применить теорему 1.

Лемма 8 (дистрибутивность). *Справедливо соотношение*

$$(A+B)\wedge C=(A\wedge C)+(B\wedge C).$$

Доказательство. Согласно лемме 7 справедливо $A\wedge C\leq(A+B)\wedge C$ и $B\wedge C\leq(A+B)\wedge C$. Поскольку выполняется $A\wedge C\leq A$, $B\wedge C\leq B$ и $A\perp B$, имеем $A\wedge C\perp B\wedge C$, т. е. их сумма определена.

Из ограниченности сложения (A4) получаем

$$(A \wedge C) + (B \wedge C) \leq (A + B) \wedge C.$$

Учитывая единственность булева пересечения, достаточно показать

$$(A + B) - ((A \wedge C) + (B \wedge C)) \perp C - ((A \wedge C) + (B \wedge C)).$$

Проверим, что левый элемент можно записать в виде

$$(A - (A \wedge C)) + (B - (B \wedge C)).$$

Действительно,

$$A + B = [(A \wedge C) + (A - (A \wedge C))] + [(B \wedge C) + (B - (B \wedge C))] = \\ = ((A \wedge C) + (B \wedge C)) + [(A - (A \wedge C)) + (B - (B \wedge C))]$$

— ассоциативность сложения. Остается вычесть $(A \wedge C) + (B \wedge C)$ из обеих частей равенства. Теперь, используя формулу $(*)$, можно записать

$$(A + B) - ((A \wedge C) + (B \wedge C)) = A \wedge (1 - C) + B \wedge (1 - C) \leq 1 - C$$

(мы воспользовались монотонностью пересечения и ограниченностью сложения).

Заметим теперь

$$C - ((A \wedge C) + (B \wedge C)) \leq C$$

и воспользуемся дизъюнктностью $C \perp 1 - C$ и монотонностью дизъюнктности. Лемма доказана.

Определение 4. Пусть $\mathcal{A}$ — отделимая алгебра Дынкина и выполняется $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Назовем $\mathcal{B}$ *булевой подалгеброй* в $\mathcal{A}$, если справедливо $0 \in \mathcal{B}$, $1 \in \mathcal{B}$ и выполнены свойства

1) если имеем $A \in \mathcal{B}$, выполняется $1 - A \in \mathcal{B}$;

2) если имеем $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, существует $A_1 \wedge A_2$ и выполняется $A_1 \wedge A_2 \in \mathcal{B}$.

В силу леммы 6 операция булева пересечения ассоциативна в $\mathcal{B}$.

Определим теперь булево объединение в $\mathcal{B}$ формулой

$$A_1 \vee A_2 = 1 - ((1 - A_1) \wedge (1 - A_2)).$$

Формула $(*)$ помогает доказать стандартные дистрибутивные правила обычным образом:

$$(A_1 \vee A_2) \wedge A_3 = [1 - ((1 - A_1) \wedge (1 - A_2))] \wedge A_3 = \\ = 1 - [(1 - A_1) - ((1 - A_1) \wedge A_2)] \wedge A_3 = [A_1 + (1 - A_1) \wedge A_2] \wedge A_3 = \\ = [A_1 + (A_2 - (A_1 \wedge A_2))] \wedge A_3 = (A_1 \wedge A_3) + (1 - A_1) \wedge A_2 \wedge A_3 = \\ = (A_1 \wedge A_3) + [(A_2 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)] = \\ = [((A_1 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)) + (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)] + [(A_2 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)] = \\ = ((A_1 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)) + [(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)((A_2 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3))] = \\ = (A_2 \wedge A_3) + ((A_1 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)).$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}(A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3) &= 1 - (1 - (A_1 \wedge A_3)) \wedge (1 - (A_2 \wedge A_3)) = \\ &= 1 - [(1 - (A_2 \wedge A_3)) - (A_1 \wedge A_3) \wedge (1 - (A2 \wedge A_3))] = \\ &= (A_2 \wedge A_3) + [(A_1 \wedge A_3) - ((A_1 \wedge A_3) \wedge (A_2 \wedge A_3))] = \\ &= (A_2 \wedge A_3) + ((A_1 \wedge A_3) - (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)).\end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь

$$(A_1 \vee A_2) \wedge A_3 = (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3).$$

Второй дистрибутивный закон проверяется аналогично. Подчеркнем, что при вычислениях следует пользоваться только корректно определенными выражениями (сложение и вычитание определены не всюду).

В итоге мы обнаруживаем, что булевы подалгебры в $\mathcal{A}$ удовлетворяют всем свойствам обычных булевых алгебр (см., например, [6]).

Теперь мы можем сформулировать следующий итоговый результат (см. аналогичное утверждение в [1] для классических алгебр Дынкина).

Теорема 2. *Каждая отделимая алгебра Дынкина является объединением своих максимальных булевых подалгебр.*

Доказательство состоит в стандартном применении леммы Цорна.

Отметим еще раз, что в [1] термин «алгебра Дынкина» не использовался.

Для неотделимых алгебр операция булева пересечения теряет часть своих свойств (ср., скажем, с теоремой 1 и леммами 5 и 6). Поэтому рассматривать булевы подалгебры в ней и обсуждать утверждение теоремы 2 становится, по нашему мнению, малоинтересным занятием. Может оказаться, скажем, что корректно определяются только четырехэлементные булевы подалгебры (т. е. порожденные одним нетривиальным элементом). Формально теорема 2 справедлива, но бесполезна.

Литература

1. *Валландер С. С.* Несколько замечаний об аксиоматике теории вероятностей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 21–23.
2. *Валландер С. С.* Многолистные вероятностные пространства // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 327–333.
3. *Колмогоров А. Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 48–58.
4. *Sierpiński W.* Sur une définition axiomatique des ensembles measurable (L). // Oevres choisies. PVN. Warsaw. 1975. Vol. 2. P. 256–260.
5. *Дынкин Е. Б.* Основания теории марковских процессов. М.: Физматгиз, 1959. 228 с.
6. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила в редколлегию 14 февраля 2016 г.

Сведения об авторе

Валландер Сергей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент;
crazymath@yandex.ru, s.vallander@spbu.ru

THE STRUCTURE OF SEPARABLE DYNKIN ALGEBRAS

Sergey S. Vallander

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; crazymath@yandex.ru, s.vallander@spbu.ru

We continue to study abstract Dynkin algebras introduced in [2]. Such algebras form a useful instrument for discussing probabilities in a rather natural context. Abstractness means the absence of a set-theoretic structure of elements in such algebras. We introduce a large useful class of abstract algebras — separable Dynkin algebras and indicate also the simplest example of a non-separable algebra. The property of separability allows us to define appropriate variants of Boolean versions to operations of intersection and union of elements. Such operations are in general only partially defined. Some properties of separable algebras are proved. We use them to receive the standard properties of intersection and union including associativity and distributivity in case the corresponding operations are applicable. The established facts allow us to define Boolean subalgebras in a separable Dynkin algebra and to check the coincidence of our version of definition with a usual one.

Finally we formulate and prove the main result about structure of separable Dynkin algebras — we represent them as a set-theoretic union of maximal Boolean subalgebras. The proof uses earlier done preparation and standard scheme of Zorn lemma application. Refs 6.

Keywords: abstract Dynkin algebras, Boolean operations, separable Dynkin algebras.

References

1. Vallander S. S., “Some Remarks on Axioms of Probability Theory”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **46**, Issue 3, 126–128 (2013).

2. Vallander S. S., “Multivalent Probability Spaces”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **48**, Issue 3, 135–139 (2015).

3. Kolmogorov A. N., “General Measure Theory and Calculus of Probabilities”, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 48–58 (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].

4. Sierpiński W., “Sur une définition axiomatique des ensembles measurable (L)”, *Oevres choisies* **2**, 256–260 (PVN, Warsaw, 1975) [in French].

5. Dynkin E. B., *Foundations of Markov Processes Theory* (Fizmatgiz, Moscow, 1959) [in Russian].

6. Kuratowski K., Mostowski A., *Set Theory* (Amsterdam, North-Holland, 1967).

Для цитирования: Валландер С. С. Строение отделимых алгебр Дынкина // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 377–383. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.304

For citation: Vallander S. S. The structure of separable Dynkin algebras. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 377–383. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.304