УДК 517 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИЙ ИЗ $L^p(\mathbb{R}^n)$ ПРИ $p \in (2, +\infty)$*

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна;
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Пусть $p \in (2, +\infty)$, $n \geq 1$, S — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\Gamma(S, p)$ — множество всех тех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в S. Предполагается, что при $n = 1$ множество $\overline{S}$ может содержать ноль, а при $n > 1$ может пересекаться с координатными гиперплоскостями. В работе установлено достаточное условие выполнения неравенства

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, S) \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n,\ \tau_j \in [0, t_j]$, если $t_j \geq 0$, и $\tau_j \in [t_j, 0]$, если $t_j < 0,\ 1 \leq j \leq n\}$, а константа $C(n, p, S) > 0$ не зависит от $\gamma \in \Gamma(S, p)$. Библиогр. 14 назв.

Ключевые слова: неравенство Бора.

Введение. Выберем произвольное $\Lambda > 0$, натуральное N и обозначим через $P_N(\Lambda)$ множество всевозможных тригонометрических сумм вида

$$p(\tau) = \sum_{m=1}^{N} p_m e^{i\lambda_m \tau}, \quad \lambda_m \in \mathbb{R}^1, \quad p_m \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq m \leq N,$$

показатели Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\min_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \geq \Lambda.$$

Х. Бор [1] доказал, что при любом N для таких тригонометрических сумм выполняется неравенство

$$|p(\tau)| \leq \frac{\pi}{2\Lambda} \left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)}.$$

Вскоре после публикации Х. Бора стали появляться обобщения этого неравенства: Ж. Фавар [2, 3], Б. М. Левитан [4], Л. Хермандер [5] и др., а само неравенство, начиная с работы Ж. Фавара [3], стало называться неравенством Бора. (Более подробный обзор приведен в работе автора [6].)

В связи с исследованиями автора в области теории дифференциальных уравнений (см. ссылки в [6]) им в работах [6–8] было предложено свое обобщение неравенства Бора как неравенства, дающего оценку интегралов от функций из некоторых подмножеств пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ через нормы самих этих функций. В [6] предполагалось, что $p \in (1, 2]$, в [7, 8] изучался случай, когда $p \in (2, +\infty]$, а спектры подынтегральных функций отделены от координатных гиперплоскостей. В настоящей работе это ограничение на спектры снимается.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00202).

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.407

Пусть $n \geq 1$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in (2, +\infty)$ и $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Gamma(S,p)$ множество всех тех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в S; $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n,\ \tau_j \in [0, t_j]$, если $t_j \geq 0$ и $\tau_j \in [t_j, 0]$, если $t_j < 0,\ 1 \leq j \leq n\}$.

В настоящей работе устанавливаются условия выполнения неравенства

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,S) \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{0.1}$$

где $\gamma \in \Gamma(S,p)$, а константа $C(n,p,S) > 0$ не зависит от выбора γ из $\Gamma(S,p)$.

Доказываются следующие утверждения:

1) если S открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$, где F — объединение координатных гиперплоскостей, то (см. теорему 2.1) для выполнения (0.1) достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\widetilde{\xi}_S(\tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_S e^{i(y,\tau)} dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \tag{0.2}$$

2) если S открыто, то (см. теорему 3.1) для выполнения (0.1) достаточно, чтобы имело место соотношение

$$K(\tau, S) = \lim_{||d|| \to 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{S \setminus Q(d)} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{m=1}^n \frac{1}{iy_m}\right] dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{0.3}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_m > 0$, $1 \leq m \leq n$,

$$Q(d) = \bigcup_{m=1}^n \{y | y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |y_m| < d_m\}.$$

В работе также установлен и ряд других результатов.

§ 1. Определения, обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $n \geq 1$ и $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Следуя [9, с. 77], обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,t)} u(t) dt. \tag{1.1}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, также следуя [9, с. 77], будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно согласно [10, с. 426] имеет вид

$$\widetilde{v}(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,t)} v(y) dy.$$

Обозначим (см. [9, с. 73], [11, с. 31]) через $S(\mathbb{R}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^n)$ пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, тогда, как известно, функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\gamma(t)} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^n)$.

Известно также, что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^n)$, обозначаемый в соответствии с (1.1) $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой

$$(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi).$$

Пусть $p \in (1, +\infty)$, функция $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и g — ее преобразование Гильберта:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\gamma(t)}{t - x} dt.$$

Тогда [12, с. 176] существует такая константа $H_p > 0$, зависящая только от p, что справедливо неравенство

$$\|g(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le H_p \|\gamma(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}. \tag{1.2}$$

В работах автора [7, 8] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть $n \ge 1$, $p \in (2, +\infty]$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_k > 0$, $1 \le k \le n$. Тогда для любой функции $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n \backslash Q(d), p)$ выполняется неравенство*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C^n(q) \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{d_k^{1/q}} \right] \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.3}$$

где константа $C(q) > 0$ не зависит от γ и вектора d.

§ 2. Неравенство (0.1) в случае, когда S открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$.

Лемма 2.1. *Пусть $p \in (2, +\infty)$, $n \ge 1$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто, ограничено и $\overline{S} \cap F = \emptyset$. Тогда, если справедливо*

$$K(\tau, t, S) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,\tau)} \left[\prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{-iy_k t_k}}{iy_k} \right] \xi_S(y) dy \in L^q(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ξ_S — характеристическая функция множества S и $1/p + 1/q = 1$, то для любой функции $\gamma \in \Gamma(S, p)$ выполняется равенство

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S)} \gamma(\tau) d\tau, \tag{2.2}$$

где $n(t)$ — число отрицательных координат вектора t.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\gamma \in \Gamma(S, p)$. Если хоть одна из координат вектора $t = (t_1, \ldots, t_n)$ равна нулю, то в силу (2.1) будем иметь

$K(\tau,t,s)\equiv 0$, и равенство (2.2) очевидно выполняется. Поэтому далее при доказательстве леммы мы будем предполагать, что ни одна из координат вектора t не равна нулю.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t} e^{-i(y,\tau)}\gamma(\tau)d\tau=(-1)^{n(t)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\xi_{E_t}(\tau)\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right\}^{\sim}(\tau)\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\left\{\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right]\xi_S(-y)\right\}^{\sim}(\tau)\gamma(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\left\{\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right]\cdot[1-\xi_S(-y)]\right\}^{\sim}(\tau)\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\overline{K(\tau,t,S)}\gamma(\tau)d\tau+\widehat{\ell}(y,t,S)*\widehat{\gamma}(y),\quad (2.3)$$

где

$$\ell(\tau,t,S)=\left\{\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-iy_kt_k}}{iy_k}\right]\cdot[1-\xi_S(-y)]\right\}^{\sim}(\tau).$$

Обозначив для краткости $\sigma(\gamma)=\mathrm{supp}\widehat{\gamma}$, получаем в силу [13, с. 69] и [14, с. 8]

$$\mathrm{supp}\{\widehat{\ell}(y,t,S)*\widehat{\gamma}(y)\}\subseteq\overline{\mathrm{supp}\widehat{\ell}(y,t,S)+\sigma(\gamma)}=[\mathbb{R}^n\setminus(-S)]+\sigma(\gamma)=\mathbb{R}^n\setminus\{-\bigcap_{x\in\sigma(\gamma)}(S-x)\}.$$

Так как $\sigma(\gamma)\subset S$, можно указать малую окрестность нуля V такую, что выполняется $V\subset\prod\limits_{x\in\sigma(\gamma)}(S-x)$, т. е. окрестность нуля, не входящую в $\mathrm{supp}[\widehat{\ell}(y,t,S)*\widehat{\gamma}(y)]$. Следовательно, если $y\in V$, то $\widehat{\ell}(y,t,S)*\widehat{\gamma}(y)=0$. Но тогда в силу (2.1) из (2.3) получаем

$$(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau=(-1)^{n(t)}\lim_{\|y\|\to 0}\int\limits_{E_t} e^{-i(y,\tau)}\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\lim_{\|y\|\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)}\overline{K(\tau,t,S)}\gamma(\tau)d\tau+\lim_{\|y\|\to 0}\widehat{\ell}(y,t,S)*\widehat{\gamma}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\tau,t,S)}\gamma(\tau)d\tau.$$

Лемма 2.2. *Пусть $n\geq 1$, $S\subset\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^n$, $p\in(2,+\infty)$, $\gamma\in L^p(\mathbb{R}^n)$ и выполнены следующие условия:*

1) S открыто, ограничено и $\overline{S}\cap F=\emptyset$;

2) $\mathrm{supp}\widehat{\gamma}\subset S$;

3) для множества S справедливо равенство (0.3).

Тогда имеет место соотношение

$$(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\tau,S)}\gamma(\tau)d\tau-\sum_{a=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\tau_1,\dots,\tau_a-t_a,\dots,\tau_n,S)}\gamma(\tau)d\tau+$$
$$+\sum_{\substack{a,b=1\\a<b}}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\tau_1,\dots,\tau_a-t_a,\dots,\tau_b-t_b,\dots,\tau_n,S)}\gamma(\tau)d\tau+$$
$$+\dots+(-1)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\tau_1-t_1,\dots,\tau_n-t_n,S)}\gamma(\tau)d\tau,\quad (2.4)$$

где $t=(t_1,\dots,t_n)$ *и* $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из (2.1), (2.2), определения $K(\tau,S)$ и равенства

$$K(\tau,t,S)=K(\tau,S)-\sum_{a=1}^{n}K(\tau_1,\dots,\tau_a-t_a,\dots,\tau_n,S)+$$
$$+\sum_{\substack{a,b=1\\a<b}}^{n}K(\tau_1,\dots,\tau_a-t_a,\dots,\tau_b-t_b,\dots,\tau_n,S)+$$
$$+\dots+(-1)^nK(\tau_1-t_1,\dots,\tau_n-t_n,S).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $n\geq 1$, $S\subset\mathbb{R}^n$, S *открыто, ограничено,* $\overline{S}\cap F=\emptyset$, $p\in(2,+\infty)$ *и выполнено условие* (0.3). *Тогда при каждом* $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ *для любой функции* $\gamma\in\Gamma(S,p)$ *выполняется неравенство*

$$\left\|\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq 2^n\,\|K(\tau,S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\quad (2.5)$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно следует из (2.4) и (0.2).

В следующих лемме 2.3 и теореме 2.2 условие (0.3) заменено на более простое достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (0.1).

Лемма 2.3. *Пусть* $n\geq 1$, $\Delta=(\Delta_1,\dots,\Delta_n)$ *— вектор с положительными координатами,* $S\subset\mathbb{R}^n$, S *— открыто, ограничено,* $\overline{S}\subset\mathbb{R}^n\setminus Q(\Delta)$, $p\in(2,+\infty)$ *и выполнено условие* (0.2). *Тогда справедливы утверждения:*

1) существует такая константа $C_{22}>0$, *не зависящая от вектора* Δ *и* $\gamma\in\Gamma(S,p)$, *что выполняется неравенство*

$$\|K(\tau,S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leq C_{22}\left[\prod_{n=1}^{n}\frac{1}{\Delta_m}\right]\cdot\|\widetilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)};\quad (2.6)$$

2) при каждом $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ *для любой функции* $\gamma\in\Gamma(S,p)$ *имеет место равенство* (2.4).

Доказательство. 1) Пусть $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$. По заданному вектору Δ выберем произвольный вектор $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ такой, что $0<\rho_k<\Delta_k/2$, $1\leq k\leq n$. Обозначим через $\Omega(\tau_k,\Delta_k,\rho_k)$ функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y_k,\Delta_k,\rho_k)=\xi_{[-\Delta_k/2,\Delta_k/2]}(y_k)*\left\{\frac{1}{\rho_k^2}\xi_{[-\rho_k/2,\rho_k/2]}(y_k)*\xi_{[-\rho_k/2,\rho_k/2]}(y_k)\right\},\quad 1\le k\le n.$$

Тогда будем иметь

$$0\le\widehat{\Omega}(y_k,\Delta_k,\rho_k)\le 1;$$

$\widehat{\Omega}(y_k,\Delta_k,\rho_k)=0$, если $y_k\notin(-\Delta_k/2-\rho_k,\Delta_k/2+\rho_k)$; $\widehat{\Omega}(y_k,\Delta_k,\rho_k)=1$, если $y_k\in[-\Delta_k/2+\rho_k,\Delta_k/2-\rho_k]$;

$$\left|\frac{d^2}{dy_k^2}\widehat{\Omega}(y_k,\Delta_k,\rho_k)\right|\le\frac{1}{\rho_k^2}.$$

Обозначим

$$K_0(\tau)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(y,\tau)}\left[\prod_{m=1}^n\frac{1-\widehat{\Omega}(y_m,\Delta_m,\rho_m)}{iy_m}\right]dy_m.$$

Тогда получим $\widehat{K}_0(y)=\prod\limits_{m=1}^n 1/iy_m$, если $y\in\mathbb{R}^n\setminus Q(\Delta/2+\rho)$; $\widehat{K}_0(y)=0$, если $y\in Q(\Delta/2-\rho)$ и

$$\left\|\frac{d^2}{dy_m^2}\widehat{K}_0(y)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<+\infty,\quad y_m\in\mathbb{R}^1.$$

Таким образом, имеем $K_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Положим $\rho=\Delta/4$. В силу леммы 2.2, установленной автором в [7, с. 32], можно указать константу $C_{22}>0$, не зависящую от вектора Δ и такую, что выполняется неравенство

$$\|K_0(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<C_{22}\left[\prod_{m=1}^n\frac{1}{\Delta_m}\right].$$

Но тогда $K(\tau,S)=K_0(\tau)*\widetilde{\xi}_S(\tau)$ и $\|K_0(\tau,S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le\|K_0(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\widetilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

2) Утверждение следует из (2.6) и леммы 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть $n\ge 1$, $\Delta=(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ — вектор с положительными координатами, $S\subset\mathbb{R}^n$, S открыто, ограничено, $\overline{S}\subset\mathbb{R}^n\setminus Q(\Delta)$, $p\in(2,+\infty)$ и выполнено условие* (0.2). *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le 2^nC_{22}\left[\prod_{m=1}^n\frac{1}{\Delta_m}\right]\cdot\|\widetilde{\xi}_S(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\cdot\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\qquad(2.7)$$

Доказательство. Неравенство (2.7) следует из (2.5) и леммы 2.3.

Замечание 2.1. Отметим, что условия (0.2) и (0.3) выполняются не при всяком $q\in(1,2)$ и не для всякого открытого ограниченного множества S, $\overline{S}\cap F=\emptyset$, хотя согласно теореме автора, приведенной в § 1, для таких S неравенство, дающее оценку интеграла от какой-либо функции $\gamma\in\Gamma(S,p)$ через $L^p(\mathbb{R}^n)$ — норму этой функции, — выполняется. Действительно, пусть имеем, например, $n=2$, $a,b>1$, $S=\{y|y=(y_1,y_2),\ (y_1-a)^2+(y_2-b)^2<1\}$ и

$$\widetilde{\xi}_S(t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iint\limits_S e^{i(y,t)}dy.$$

Можно проверить, что в этом случае выполняется равенство

$$\widetilde{\xi}_S(t) = \frac{e^{iat_1}e^{ibt_2}}{2\pi\sqrt{t_1^2+t_2^2}} J_1\left(\sqrt{t_1^2+t_2^2}\right), \tag{2.8}$$

где $t = (t_1, t_2)$ и $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. При этом условие $\widetilde{\xi}_S \in L^q(\mathbb{R}^2)$ очевидно выполняется тогда и только тогда, когда $q > 4/3$. Из (2.8) и определения функции $K(\tau, S)$, содержащегося в (0.3), следует

$$K(\tau, S) = \int\limits_{\tau_1}^{\mathrm{sign}\tau_1\cdot\infty} \int\limits_{\tau_2}^{\mathrm{sign}\tau_2\cdot\infty} \widetilde{\xi}_S(t_1, t_2)dt_1dt_2, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2).$$

Можно также доказать, что условие $K(\,\cdot\,, S) \in L^q(\mathbb{R}^2)$ выполняется только при $q > 4/3$.

§ 3. Основная теорема. Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Выберем произвольный вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$ с положительными координатами и обозначим

$$\gamma(\tau, d) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * \left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\delta(\tau_k) - \frac{\sin d_k\tau_k}{\pi\tau_k}\right]\right\}, \tag{3.1}$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Тогда будем иметь

$$\widehat{\gamma}(y, d) = \widehat{\gamma}(y), \quad \text{если} \quad y \in Q(d), \tag{3.2}$$

$$\widehat{\gamma}(y, d) = 0, \quad \text{если} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q(d)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) и неравенства (1.2) следует $\gamma(\,\cdot\,, d) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\lim_{\|d\|\to 0} \|\gamma(\tau, d)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.4}$$

Для произвольных векторов $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ таких, что выполняется $0 < \lambda_k < \Lambda_n$, $1 \leq k \leq n$, положим

1) $\prod_{\lambda,\Lambda} = \{y | y = (y_1, \ldots, y_n),\, y_k \in (-\Lambda_k, -\lambda_k] \cup [\lambda_k, \Lambda_k),\ 1 \leq k \leq n\}$,

2)

$$\gamma(\tau, \lambda, \Lambda) = \gamma(\tau) * \{\xi_{\prod_{\lambda,\Lambda}}(y)\}^{\sim}(\tau), \tag{3.5}$$

3) $\gamma(\tau, \lambda, \Lambda, \infty) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda)$.

Тогда будем иметь

1) $\widehat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) = \widehat{\gamma}(y)$, если $y \in \overset{\circ}{\Pi}_{\lambda,\Lambda}$ и $\widehat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) = 0$, если $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Pi}_{\lambda,\Lambda}$;

2) $\widehat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda, \infty) = \widehat{\gamma}(y)$, если $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{(Q(\lambda) \cup \Pi_{\lambda,\Lambda})}$ и $\widehat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda, \infty) = 0$, если $y \in Q(\lambda) \cup \Pi_{\lambda,\Lambda}$;

3)

$$\gamma(\tau, \lambda, \Lambda) = \gamma(\tau) * \left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\Lambda_k\tau_k}{\pi\tau_k} - \frac{\sin\lambda_k\tau_k}{\pi\tau_k}\right]\right\} \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{3.6}$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Лемма 3.1. *Пусть* $n \geq 1$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda_k < \Lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, $p \in (2, +\infty)$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *и* $t \in \mathbb{R}^n$ *— произвольный вектор. Тогда справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_{E_t} \left\{ \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) - \gamma(\tau) * \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\} d\tau \right| <$$

$$< C_{31} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_k^{1/q}} + \frac{1}{\Lambda_k^{1/q}} \right) - \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^{1/q}} \right\} \cdot \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\delta(\cdot)$ *— дельта-функция, а* $C_{31} > 0$ *константа, не зависящая от* λ, Λ *и* γ.

Доказательство. Обозначим

$$W(\tau_k) = \frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \Lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k}, \quad w(\tau_k) = \frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда согласно (3.6) получим

$$\left| \int\limits_{E_t} \left\{ \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) - \gamma(\tau) * \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin \lambda_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{a=1}^{n} \left| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) * \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{n} w(\tau_k) \right] W(\tau_a) \right\} d\tau \right| +$$

$$+ \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{n} \left| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) * \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{n} w(\tau_k) \right] W(\tau_a) W(\tau_b) \right\} d\tau \right| + \cdots$$

$$+ \left| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) * \left[\prod_{k=1}^{n} W(\tau_k) \right] d\tau \right|. \quad (3.7)$$

Пусть $d = (d_1, \ldots, d_n)$ — вектор с положительными координатами и

$$h(\tau) = \gamma(\tau) * \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau_k) - \frac{\sin d_k \tau_k}{\pi \tau_k} \right] \right\}.$$

Тогда согласно (3.1) и (1.2) будем иметь

$$\|h(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(1 + \frac{2}{\pi} H_p \right)^n \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как в силу (3.1)–(3.3) имеем $\operatorname{supp} \widehat{h} \subset \mathbb{R}^n \setminus Q(d)$, то $h \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(d), p)$ и по теореме 1.1 из § 1 получаем неравенство

$$\left| \int\limits_{E_t} h(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C^n(q)}{(d_1, \ldots, d_n)^{1/q}} \left(1 + \frac{2}{\pi} H_p \right)^n \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.8)$$

Применяя оценку (3.8) к каждому из слагаемых, стоящих в правой части (3.7), получим утверждение леммы при $C_{31} = C^n(q)\big(1 + \frac{2}{\pi}H_p\big)^n$.

Лемма 3.2. *Пусть $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто и выполнено условие* (0.3). *Тогда для любых $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \in \Gamma(S, p)$ имеет место равенство*

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, S)} \gamma(\tau) d\tau - \sum_{a=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, t_a - \tau_a, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau_1, \dots, t_a - \tau_a, \dots, t_b - \tau_b, \dots, \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau +$$

$$+ \dots + (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n, S)} \gamma(\tau) d\tau, \qquad (3.9)$$

где $n(t)$ — число отрицательных координат вектора t и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma(S, p)$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Для любых векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, удовлетворяющих условию $0 < \lambda_k < \Lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, выполнено равенство

$$\int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau = \int\limits_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau + \int\limits_{E_t} \gamma(\tau, \lambda) d\tau + \int\limits_{E_t} \{\gamma(\tau) - \gamma(\tau, \lambda) - \gamma(\tau, \lambda, \Lambda)\} d\tau. \qquad (3.10)$$

Рассмотрим первый интеграл из правой части (3.10). В силу (3.6) имеем $\gamma(\tau, \lambda, \Lambda) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и согласно (3.5) $\operatorname{supp} \widehat{\gamma}(y, \lambda, \Lambda) \subset S \subset \mathring{\Pi}_{\lambda/2, \Lambda}$. Следовательно, с учетом (3.5) получаем

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S \cap \mathring{\Pi}_{\lambda/2, \Lambda})} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \widetilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\tau - \theta) d\theta \right] d\tau. \qquad (3.11)$$

В силу (0.3) и (1.2) имеем $K(\tau, S \cap \mathring{\Pi}_{\lambda/2, \Lambda}) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$, поэтому из (2.1) получим $K(\,\cdot\,, t, S \cap \mathring{\Pi}_{\lambda/2, \Lambda}) \in L^q(\mathbb{R}^n)$. А так как $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и выполняется

$$\widetilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\tau - \theta) = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin \Lambda_k (\tau_k - \theta_k)}{\pi(\tau_k - \theta_k)} - \frac{\sin \lambda_k (\tau_k - \theta_k)}{\pi(\tau_k - \theta_k)} \right],$$

в правой части (3.11) можно изменить порядок интегрирования:

$$(-1)^{n(t)} \int\limits_{E_t} \gamma(\tau, \lambda, \Lambda) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(\tau, t, S \cap \mathring{\Pi}_{\lambda/2, \Lambda}) \widetilde{\xi}_{\Pi_{\lambda, \Lambda}}(\theta - \tau) dr} \right] d\theta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \overline{K(\theta, t, \mathring{\Pi}_{\lambda, \Lambda} \cap S)} d\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \overline{K(\theta, t, S)} d\theta -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\theta) \left[\overline{K(\theta, t, S) - K(\theta, t, \Pi_{\lambda, \Lambda} \cap S)} \right] d\theta.$$

Но тогда из (3.10) получаем

$$(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\gamma(\theta)\overline{K(\theta,t,S)}d\theta-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\gamma(\theta\left[\overline{K(\theta,t,S)-K(\theta,t,S\cap\Pi_{\lambda,\Lambda})}\right]d\theta+$$
$$+(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau,\lambda)d\tau+(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\{\gamma(\tau)-\gamma(\tau,\lambda)-\gamma(\tau,\lambda,\Lambda)\}d\tau. \quad (3.12)$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. При сделанных выше обозначениях и предположениях можно выбрать такое число $a_0>0$, что при всех $0<a<a_0$ для вектора $\lambda=(a,a,\ldots,a)$ третье слагаемое из правой части (3.12) не будет согласно (3.4) превосходить $\varepsilon/3$. Далее, можно выбрать такие числа $0<a_1<a_0<A_0$, что для любого $A_1>A_0$ величина

$$\|K(\tau,S)-K(\tau,S\cap\Pi_{\lambda,\Lambda})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,,$$

где $\lambda=a_1(1,\ldots,1)$ и $\Lambda=A_1(1,\ldots,1)$, будет столь малой, что второе слагаемое из правой части (3.12) не будет превосходить по модулю величину $\varepsilon/3$. Рассмотрим четвертое слагаемое. Согласно (3.1) и лемме 3.1 при $\lambda=a_1(1,\ldots,1)$ и $\Lambda=A_1(1,\ldots,1)$ имеем из (3.1)

$$\left|\int\limits_{E_t}\{\gamma(\tau)-\gamma(\tau,\lambda)-\gamma(\tau,\lambda,\Lambda)\}d\tau\right|=$$
$$=\left|\int\limits_{E_t}\left\{\gamma(\tau)*\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\delta(\tau_k)-\frac{\sin a_1\tau_k}{\pi\tau_k}\right)-\gamma(\tau,\lambda,\Lambda)\right\}d\tau\right|<$$
$$<C_{31}\left\{\left(\frac{1}{a_1^{1/q}}+\frac{1}{A_1^{1/q}}\right)^n-\frac{1}{a_1^{n/q}}\right\}\cdot\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Ясно, что число A_1 можно выбрать столь большим, чтобы это слагаемое не превосходило $\varepsilon/3$.

Таким образом, из (3.12) получаем, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать «малый» вектор λ и «большой» вектор Λ, для которых будет справедливо неравенство

$$\left|(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\theta,t,S)}\gamma(\theta)d\theta\right|<\varepsilon.$$

Но тогда будем иметь

$$(-1)^{n(t)}\int\limits_{E_t}\gamma(\tau)d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K(\theta,t,S)}\gamma(\theta)d\theta,$$

откуда в силу (2.1) и (0.2) следует равенство (3.9).

Из (3.9) очевидным образом получаем нижеследующее основное утверждение параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть* $n \geq 1$, $p \in (2, +\infty)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ *открыто и выполнено условие* (0.3). *Тогда для любых* $t \in \mathbb{R}^n$ *и* $\gamma \in \Gamma(S, p)$ *имеет место равенство* (3.9) *и оценка*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n \|K(\tau, S)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Автор выражает искреннюю признательность профессору Н. А. Широкову за внимание к работе, а также глубокую благодарность рецензентам за ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения материала.

Литература

1. *Bohr H.* Ein allgemeiner Sats über Integration eines trigonometrischen Polynomials // Prace Mathemtyzcne Fizyczne. 1935. H. 43. S. 273–288. См. также: Collected Mathematical works. 1952. Vol. 2. P. 36.

2. *Favard J.* Sur une properiete extremale de l'integrale d'une function periodique // Comptes Rendus De L'Academie des Sciences. 1936. Vol. 202. P. 273–276.

3. *Favard J.* Application de la formule sommatorie d'Euler á la démonstration de quelques propriétés extremales des integrales des functions periodiques on Presque — periodiques // Matematisk Tidsskrift. Серия B. 1936. C. 81–94.

4. *Левитан Б. М.* Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и H. Bohr'a // ДАН СССР. 1937. T. XV, № 4. C. 169–172.

5. *Hörmander L.* A new proof and a generalization of an inequality of Bohr // Mathematica Scandinavica. 1954. Vol. 2. P. 33–45.

6. *Иванов Б. Ф.* Об одном обобщении неравенства Бора // Проблемы анализа. 2013. T. 2(20), № 2. C. 21–58.

7. *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I // Проблемы анализа. 2014. T. 3(21), № 1. C. 16–34.

8. *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. II // Проблемы анализа. 2014. T. 3(21), № 2. C. 32–51.

9. Функциональный анализ. Серия: «Справочная математическая библиотека» / под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.

12. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

14. *Макаров Б. М., Подкорытов А. Н.* Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2016 г.

Сведения об авторе

Иванов Борис Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент; ivanov-bf@yandex.ru

ON THE INEQUALITY OF BOHR FOR INTEGRALS OF FUNCTIONS FROM $L^p(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < +\infty$

Boris F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design;
Higher School of Technology and Energy, ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation; ivanov-bf@yandex.ru

Let $p \in (2, +\infty)$, $n \geq 1$, S be an open subset of $\mathbb{R}^n$, and $\Gamma(S, p)$ be a set of all the functions $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ spectrum of which belongs to S. If $n = 1$ then $\overline{S}$ can contain zero and if $n > 1$ $\overline{S}$ can intersect coordinate hyperplanes. It is obtained sufficient condition validity of the inequality

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau)\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p,S) \quad \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

where $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $E_t = \{\tau | \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau_j \in [0, t_j]$, if $t_j \ge 0$, and $\tau_j \in [t_j, 0]$, if $t_j < 0$, $1 \le j \le n\}$, and the constant $C(n,p,S) > 0$ does not depend on $\gamma \in \Gamma(S,p)$. Refs 14.

Keywords: inequality of Bohr.

References

1. Bohr H., "Ein allgemeiner Sats über Integration eines trigonometrischen Polynomials", *Prace Mathemtyzcne Fizyczne* **43**, 273–288 (1935). English translation in *Collected Mathematical works* **2**, p. 36 (1952).

2. Favard J., "Sur une properiete extremale de l'integrale d'une function periodique", *Comptes Rendus De L'Academie des Sciences* **202**, 273–276 (1936).

3. Favard J., "Application de la formule sommatorie d'Euler á la démonstration de quelques propriétés extremales des integrales des functions periodiques on Presque — periodiques", *Matematisk Tidsskrift. Series B*, 81–94 (1936).

4. Levitan B. M., "On some generalization of S. N. Bernstein and H. Bohr inequalities", *Ras USSR* **XV**(4), 169–172 (1937).

5. Hörmander L., "A new proof and a generalization of an inequality of Bohr", *Mathematica Scandinavica* **2**, 33–45 (1954).

6. Ivanov B. F., "On a generalization of an inequality of Bohr", *Issues Anal.* **2(20)**, No 2, 21–58 (2013) [in Russian].

7. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I", *Issue Anal.* **3(21)**, No 1, 16–34 (2014).

8. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. II", *Issue Anal.* **3(21)**, No 2, 32–51 (2014).

9. *Functional analysis.* In Ser. *The reference mathematical library* (ed. by S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].

10. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., *The elements of the functions theory and functional analysis* (Nauka, Moscow, 1968) [in Russian].

11. Gelfand I. M., Shilov G. E., *The generalized functions and the operations over them* (Fizmatlit, Moscow, 1959) [in Russian].

12. Titchmarsh E., *Introduction in theory of Fourier integrals* (GITTL, Moscow, Leningrad, 1949) [in Russian].

13. Vladimirov V. S., *Generalized functions in mathematical physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].

14. Makarov B. M., Podkorytov A. N., *The lectures on the real analysis* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2011) [in Russian].

Для цитирования: Иванов Б. Ф. О неравенстве Бора для интегралов от функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$, при $p \in (2, +\infty)$ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 582–593. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.407

For citation: Ivanov B. F. On the inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < +\infty$. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 582–593. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.407