УДК 512.741 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 2
MSC 11S31

СПАРИВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ЛОРЕНЦА*

С. В. Востоков[1], *П. Н. Питаль*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова,
Российская федерация, 190005, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

В работе строится явное спаривание в рядах Картье для формальных групп Лоренца $(X+Y+XY)/(1+c^2XY)$, где c — единица кольца целых локального поля. Доказываются основные свойства этого спаривания — билинейность и инвариантность, которые позволяют с его помощью строить в явном виде обобщенный символ Гильберта для формальных групп Лоренца над кольцами целых локальных полей. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: спаривание на формальных модулях, формальные групповые законы.

Введение. Спаривание Гильберта для различных формальных групп в явном виде было построено в работах [1, 2]. В настоящей работе такое спаривание строится для формальных групп Лоренца, имеющих вид $F_{l,c}(X,Y) = (X+Y)/(1+c^2XY)$, где c — некоторая единица локального поля, над модулями кривых Картье. При этом кроме тривиальных свойств типа билинейности доказывается важное свойство — инвариантность, т. е. независимость от выбора переменной. В первом параграфе работы даются основные обозначения и вспомогательные утверждения об эндоморфизмах формального модуля, строятся формальные логарифм и экспонента. Во втором параграфе строится основная функция, играющая важную роль в построении спаривания — функция Артина—Хассе. В последнем параграфе определяется явное спаривание Гильберта на модулях кривых Картье, проверяется билинейность спаривания (лемма 3.1), а также формула замены переменной для функции Артина—Хассе (лемма 3.2). Далее в этом параграфе (теорема 3.3) доказывается инвариантность построенного спаривания относительно замены переменной $X = g(Y)$.

1. Подготовительные вычисления и основные обозначения.

- k — локальное поле, являющееся конечным расширением Q_p (где p — простое нечетное число);
- K — его конечное расширение, содержащее первообразный корень p^n-й степени из единицы ζ;
- R — мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля вычетов $\overline{K}$ поля K в кольце целых O_K;
- M — максимальный идеал кольца целых O_K,
- T — подполе инерции K/Q_p, O_T — его кольцо целых,
- c, X — переменные,
- $O'_T = O_T[c]$, $M_c = XO'_T[[X]]$ — идеал в $O'_T[X]$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 1716-11-10200).

Пусть φ — автоморфизм Фробениуса в T/Q_p. Определим оператор Фробениуса Δ в $O'_T[X]$:

$$\Delta\left(\sum a_i c^i\right) := \sum a_i^{\varphi} c^{pi}, \quad a_i \in O_T,$$

$$\Delta\left(\sum a_i X^i\right) := \sum a_i^{\Delta} X^{pi}, \quad a_i \in O'_T[c].$$

Определим следующие формальные группы:

1) над кольцом O_T единичную формальную группу Лоренца $F_l(X,Y) = \frac{X+Y}{1+XY}$;

2) над кольцом O'_T формальную группу Лоренца $F_{l,c}(X,Y) = \frac{X+Y}{1+c^2XY}$.

Зададим на $XO'_T[[X]]$ структуру модуля рядов Картье:

$$f +_{F_{l,c}} g = F(f,g), \quad f,g \in XM_c[[X]].$$

Пусть далее $F_c(M_c)$ — формальный модуль Картье группы $F_{l,c}$.

Заметим, что имеет место равенство

$$F_{l,c} = c^{-1}\frac{cX + cY}{1 + cX \cdot cXcY} = c^{-1}F_{1,c}(cX, cY),$$

а также

$$\mathrm{th}(\mathrm{th}^{-1}(X) + \mathrm{th}^{-1}(Y)) = \mathrm{th}\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)\right) = F_{1,c}(X,Y)$$

и, аналогично,

$$F_{l,c}(X,Y) = c^{-1}\mathrm{th}(\mathrm{th}^{-1}(cX) + \mathrm{th}^{-1}(cY)).$$

Основываясь на справедливости этих равенств, легко вычислить следующие величины: формальные логарифм и экспоненту групповых законов F_l и $F_{l,c}$:

$$e_l = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \qquad e\lambda_l = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+X}{1-X}\right),$$

$$\lambda_{l,c} = c^{-1}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+cX}{1-cX}\right)\right), \qquad e_{l,c} = c^{-1}(e_l(cX, cX)) = c^{-1}\frac{e^{2cX}-1}{e^{2cX}+1};$$

эндоморфизмы умножения на p:

$$[p]_l = \frac{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^p - 1}{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^p + 1} = \frac{(1+X)^p - (1-X)^p}{(1+X)^p + (1-X)^p},$$

$$[p]_{l,c} = c^{-1}\frac{(1+cX)^p - (1-cX)^p}{(1+cX)^p + (1-cX)^p}$$

и их ядра:

$$\mathrm{Ker}[p]_l = \left\{\xi = \frac{\zeta-1}{1+\zeta}\right\}, \quad \mathrm{Ker}[p]_{l,c} = \left\{\xi = c^{-1}\frac{\zeta-1}{1+\zeta}\right\},$$

где ζ — корень p-й степени из 1.

Из вида $[p]_{l,c}$ ясно, что высота формальной группы Лоренца равна единице, поэтому можно выписать p-типические логарифмы:

$$\lambda_{l,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{p^n}}{p^n}, \qquad \lambda_{l,c,p} = c^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cX)^{p^n}}{p^n},$$

$$\lambda_{l,p} = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)^{-1} (X), \qquad \lambda_{l,c,p} = c^{-1} \left(1 - \frac{c^p \Delta}{p}\right)^{-1} (X).$$

Из последнего равенства легко находятся обратные ряды — p-типические экспоненты:

$$e_{l,p} = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)(X), \qquad e_{l,c,p} = c^{-1} \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)(cX) = c^{-1} \left(1 - \frac{c^p \Delta}{p}\right)(X).$$

2. Функции Артина—Хассе. Введем на $XO'_T[[X]]$ отображения $E_c(f) = e_c(\lambda_{c,p}(f))$ и функцию $l_c(f) = e_{p,c}(\lambda_c)(f)$, т. е. экспоненту Артина—Хассе и обратную к ней l-функцию Востокова.

Теорема 21 (Свойства экспоненты Артина—Хассе)**.** *E_c, l_c корректно определены как функции (т. е. для любого f из $XO'_T[[X]]$ его образ $E_c(f)$ ($l_c(f)$) лежит в $F_c(M_c)$), имеют целые коэффициенты в O'_T и являются взаимно-обратными функциями. Кроме того, выполняются равенства*

$$E_c(f+g) = E_c(f) +_{F_c} E_c(g); \quad l_c(f+g) = l_c(f) +_{F_c} l_c(g).$$

Доказательство. Так как, по определению имеем $c^{\Delta} = c^p$, доказательство можно провести точно также как в предложении 1 работы [3]. □

Замечание. Заметим что функции Артина—Хассе существенно зависят от выбора переменной X (т. к. оператор Фробениуса зависит от нее). Поэтому логично снабдить их индексом переменной, т. е. писать $E_{c,X}$. Также сам оператор Фробениуса снабдим индексом переменной и будем писать Δ_X.

3. Спаривание. Рассмотрим мультипликативную группу $\mathcal{H}$ рядов вида

$$\mathcal{H} = \{X^m \theta \varepsilon(X)\ m \in \mathbb{Z},\ \theta \in R\},$$

где $\varepsilon(X)$ — степенной ряд с коэффициентами из R и свободным членом 1.

Для рядов $\alpha \in \mathcal{H},\ \beta \in F_c(M_c)$ определим спаривание:

$$\langle\ ,\ \rangle_c : \qquad \mathcal{H} \times F_c(M_c) \longrightarrow O'_T \quad \mathrm{mod}\ (p^n, \mathcal{P})$$

$$\alpha, \beta \longrightarrow \frac{\mathrm{res}_X \Phi(\alpha, \beta)}{s_{l,c}},$$

где $\Phi(\alpha,\beta) = l_c(\beta) \cdot \alpha^{-1} \mathrm{d}\alpha - l(\alpha) c^{-1} \mathrm{d} \frac{\Delta}{p} c \lambda_c(\beta)$, $\mathrm{d} := \mathrm{d}/\mathrm{d}X$, $l(\alpha) = (1 - \Delta/p)\log(\alpha)$, $\mathcal{P}(\gamma) = \gamma^{\Delta} - \gamma$ для γ, лежащего в O'_T; $s_{l,c} = [p^n]_c(\underline{\xi_n})$. Здесь ξ_n — корень изогении $[p^n]_{l,c}$, лежащий в K, а $\underline{\xi_n}$ — такой ряд, что $\underline{\xi}(\pi) = \xi$ для некоторого фиксированного простого элемента π из K.

Замечание. В силу того, что $l_c(\beta)$ имеет целые коэффициенты, их имеет и ряд $\Phi(\alpha, \beta)$.

Лемма 31. *Спаривание $\langle\ ,\ \rangle_{l,c}$ линейно по обоим аргументам, т. е.*

1) $\langle\alpha_1\alpha_2,\beta\rangle_c = \langle\alpha_1,\beta\rangle_c + \langle\alpha_2,\beta\rangle_c$; $\quad\langle\alpha^a,\beta\rangle_c = a\langle\alpha,\beta\rangle_c$;

2) $\langle\alpha,\beta_1 +_{F_c} \beta_2\rangle_c = \langle\alpha,\beta_1\rangle_c + \langle\alpha,\beta_2\rangle_c$; $\quad\langle\alpha,[a]_c(\beta)\rangle_c = a\langle\alpha,\beta\rangle_c$.

Доказательство. Линейность по первому аргументу следует из аддитивности логарифмической производной $\alpha\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}X$ и линейности функции $l(\alpha)$. Линейность по второму аргументу следует из аддитивности производной и формальной аддитивности l-функции Востокова. $\square$

Дальнейшая наша цель — показать инвариантность спаривания относительно замены: $X = g(Y)$, где $g(Y)$ — ряд из $Y\mathcal{O}'_T[[Y]]$. Заметим, что любой ряд из β из $X\mathcal{O}'_T[[X]]$ можно представить в виде $\beta(X) = E_c(l_c(\beta(X)))$. А значит, в силу билинейности спаривания и формальной аддитивности экспоненты Артина—Хассе, нам будет достаточно проверить инвариантность для пары $X, E_c(aX^m)$, где $a = \theta c^k$, $\theta \in R$.

Лемма 32 (Формула замены переменной для экспоненты Артина—Хассе)**.** *Пусть имеется следующая замена переменной $X = g(Y)$, где $g(Y) \in \mathcal{O}'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$, пусть $a = \theta c^m$, $\theta \in R$, где R — мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля вычетов $\overline{K}$ кольца $\mathcal{O}_K$. Тогда справедливо равенство*

$$E_{c,X}(aX^m) = E_{c,Y}\left(c^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right), \quad \textit{где} \quad S = \sum_{r\geqslant 0}\frac{(cag^m)^{p^r}}{p^r}.$$

При этом ряд $c^{-1}(1 - \Delta_Y/p)S$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. Действительно, имеем цепочку равенств

$$E_{c,Y}\left(c^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right) = e_c\left(\left(c^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)^{-1}\right)\left(cc^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right)\right) =$$

$$= e_c\left(c^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(cag^m)^{p^r}}{p^r}\right) = E_{c,X}(aX^m).$$

Легко видеть, что

$$c^{-1}\left(1 - \frac{\Delta_Y}{p}\right)S = ag^m + c^{-1}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(cag^m)^{p^r} - (ag^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}.$$

Теперь заметим, что $ca = c\theta c^m = \theta c^{m+1}$, поэтому $(xa)^{\Delta_Y} = \theta^p c^{(m+1)p}$, а тогда

$$ag^m + c^{-1}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(cag^m)^{p^r} - (cag^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r} = ag^m + c^{-1}\sum_{r\geqslant 1}(x\alpha)^{p^r}\frac{(g^m)^{p^r} - (g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}.$$

Стандартным способом (индукцией по r, см. [1]) можно проверить, что слагаемые вида $((g^m)^{p^r} - (g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y})/p^r$ имеют целые коэффициенты. $\square$

Теорема 31. $\langle X, E_{c,X}(aX^m)\rangle_c = \langle g(Y), E_{c,Y}(c^{-1}(1 - \frac{\Delta_Y}{p})S)\rangle_c$.

Доказательство. По определению имеем

$$\langle X, E_{c,X}(aX^m)\rangle_c = \frac{\mathrm{res}_X \Phi(X)}{s_c} \mod p^n,$$

$$\left\langle g(Y), E_{c,Y}\left(c^{-1}\left(1-\frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right)\right\rangle_c = \frac{\mathrm{res}_X \Psi(Y)}{s_c},$$

где

$$\Phi(X) = aX^{m-1},$$

$$\Psi(Y) = \left(c^{-1}\left(1-\frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right)\cdot g(Y)^{-1}\mathrm{d}g(Y) - l(g(Y))c^{-1}\mathrm{d}\frac{\Delta}{p}c\lambda_c\left(c^{-1}\left(1-\frac{\Delta_Y}{p}\right)S\right) =$$

$$= ag^{m-1}\frac{\mathrm{d}g(Y)}{\mathrm{d}Y} +$$

$$+ c^{-1}\sum_{r\geqslant 1}\left(\frac{(c\alpha g^m)^{p^r} - (c\alpha g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\frac{\mathrm{d}g(Y)}{\mathrm{d}Y} - l_Y(g)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}\left(\frac{(cag^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\right)\right) =$$

$$= \alpha g^{m-1}\frac{\mathrm{d}g(Y)}{\mathrm{d}Y} +$$

$$+ c^{-1}\sum_{r\geqslant 1}a^{p^r}\left(\frac{(g^m)^{p^r} - (g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\frac{\mathrm{d}g(Y)}{\mathrm{d}Y} - l_Y(g)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}\left(\frac{(g^m)^{p^{r-1}\Delta_Y}}{p^r}\right)\right).$$

Здесь было учтено равенство $ca = c\theta c^m = \theta c^{m+1}$. Дальнейшая проверка проводится, как в предложении 3 работы [1]. $\square$

Обратим внимание, что с учетом сказанного перед леммой 3.2 мы доказали и инвариантность для пары $X, \beta(X)$. Сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 32. *Для рядов* $\beta(X) \in F_c(M_c)$, $g(Y) \in O'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$ *справедливо равенство*

$$\langle X, \beta(X)\rangle_c = \langle g(Y), \beta(g(Y))\rangle_c.$$

Проверим теперь инвариантность в случае, когда первая компонента спаривания $\alpha(X) \equiv \varepsilon(X) \equiv 1 \mod X^2$ — обратимый по умножению ряд. Пусть $g(Y) \in O'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$, $Y = X\varepsilon(X) = g(X)$, тогда $X = g^{-1}(Y)$ (имеется ввиду обратный относительно композиции ряд). Из теоремы 3.2 следует, что для произвольно ряда β из формального модуля $F_c(M_c)$ справедливо равенство

$$\langle Y, \beta(g^{-1}(Y))\rangle_c = \langle g(X), \beta(X)\rangle_c = \langle X\varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c. \tag{1}$$

Для доказательства инвариантности нам требуется проверить равенство

$$\langle \varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c = \langle \varepsilon(g^{-1}(Y), \quad \beta(g^{-1}(Y))\rangle_c, \quad X = g^{-1}(Y). \tag{2}$$

Сначала преобразуем левую часть, воспользовавшись свойством формальной аддитивности спаривания по второй компоненте:

$$\langle \varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c = \langle X\varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c -_F \langle X, \beta(X)\rangle_c = \langle \varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c -_F \langle X, \beta(X)\rangle_c. \tag{3}$$

Здесь последнее равенство следует из (1). Далее, с учетом $X = g^{-1}(Y)$, получаем

$$\langle X, \beta(X)\rangle_c = \langle g^{-1}(Y), \beta(g^{-1}(Y))\rangle_c. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), имеем

$$\langle \varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c = \langle \varepsilon(X), \beta(X)\rangle_c -_F \langle g^{-1}(Y), \beta(g^{-1}(Y))\rangle_c = \langle Y(g^{-1}(Y))^{-1}, \beta(g^{-1}(Y))\rangle_c.$$

Заметим, что $Y(g^{-1}(Y))^{-1} = g(X)X^{-1} = X\varepsilon(X)X^{-1} = \varepsilon(X)$, откуда следует (2). Наконец, рассмотрим общий случай $\alpha(X) = X^m\theta\varepsilon(X)$. В силу аддитивности спаривания по первому аргументу он легко сводится к случаям $\alpha = X$ и $\alpha = \varepsilon$ (так как θ лежит в R — мультипликативной p-делимой группе). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 33. *Для рядов* $\alpha(X) \in \mathcal{H}$, $\beta(X) \in F_c(M_c)$, $g(Y) \in O'_T[[Y]]$, $g(0) = 0$ *справедливо равенство*

$$\langle \alpha(X), \beta(X)\rangle_c = \langle \alpha(g(Y)), \beta(g(Y))\rangle_c.$$

Литература

1. *Востоков С. В.* Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 765–794.

2. *Востоков С. В., Волков В. В., Пак Г. К.* Символ Гильберта для многочленных формальных групп // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 400. С. 127–132.

3. *Востоков С. В., Климовицкий И. Л.* Примарные элементы в формальных модулях // Совр. пробл. матем. 2013. Вып. 17. С. 153–163.

4. *Колывагин В. А.* Символ норменного вычета в локальных полях // УМН. 1978. Т. 33. Вып. 6(204). С. 217–218.

5. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26(68), №1. С. 113–146.

6. *Artin E., Hasse H.* Die beiden Ergänzungssatze zum Reziprozitätsgesetz der lnln-ten Potenzreste im Körper der lnln-ten Einheitswurzeln // Abh. Mathem. Seminar, Hamburg, 1928. V. 6. S. 146–162.

7. *Hasse H.* Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II. Reziprozitätsgesetz, Leipzig, Berlin, 1930.

8. *Hasse H.* Die Gruppe der pnpn-primären Zahlen für einen Primteiler pp von pp // J. reine und angew. Math. 1936. V. 176. S. 174–183.

9. *Hasse H.* Zahlentheorie. Berlin, 1963.

10. *Hazewinkel M.* Formal Groups and Bialgebras. In Ser.: Pure Appl. Math. New York, Academic Press, 1978. V. 78. P. 478–516.

11. *Fröhlich A.* Formal groups. In Ser.: Lect. Notes Math. 1968. V. 74. 140 p.

12. *Iwasawa K.* On explizit formulas for the norm residue symbol // J. Math. Soc. Japan, 1968. V. 20. P. 151–164.

13. *Hensel K.* Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers // J. reine angew. Math. 1916. V. 146. S. 189–215.

14. *Lubin J., Tate J.* Formal complex multiplication in local fields // Ann. Math. 1965. V. 81. P. 380–387.

15. *Silverman J. H.* The Arithmetic of Elliptic Curves. In Ser.: Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2009. V. 106. 408 p.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Востоков Сергей Владимирович — профессор; sergei.vostokov@gmail.com

Питаль Петр Николаевич — аспирант; pital.petya@yandex.ru

HILBERT PAIRING ON LORENTZ FORMAL GROUP

Sergei V. Vostokov[1], *Petr N. Pital'*[2]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; sergei.vostokov@gmail.com

[2] Baltic State Technical University, ul. 1-ya Krasnoarmeyskaya, 1, St. Petersburg, 190005, Russian Federation; pital.petya@yandex.ru

In this paper, we construct explicit pairing in Cartier series for formal Lorentz groups of the form: $(X + Y + XY)/(1 + c^2XY)$, where c is unit of the ring of integers of the local field. At the same time, except for trivial properties such as bilinearity we prove important property — invariance, i. e. independence from selecting a variable. These properties, with the aid of pairing above, allow us to explicitly construct the generalized Hilbert symbol for formal Lorentz groups over rings of integers of local fields. In the first section of the paper are the basic notation and auxiliary results on endomorphisms of formal module, formal logarithm and exponent are constructed. In the second section, we build the main function, which plays an important role in the construction of the pairing — an Artin—Hasse function. In the last section we define Hilbert pairing on modules of Cartier curves explicitly, also we check bilinearity of pairing (see lemma 3.1) and variable substitution formula for Artin—Hasse function (lemma 3.2). Further in this section we prove invariance of the constructed paring regarding variable substitution $X = g(Y)$. Refs 15.

Keywords: pairing on formal module, formal group law.

References

1. Vostokov S. V., “A norm pairing in formal module”, *Math. USSR-Izv.* **15**(1), 25–51 (1980).

2. Vostokov Volkov V. V., Pak G. K., “The Hilbert Symbol of Polynomial Formal Groups”, *J. Math. Sci.* **192**(2), 196–199 (2013). DOI:10.1007/s10958-013-1383-9.

3. Vostokov S. V., Klimovitskii I. L., “Primary elements in formal modules”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **282**, suppl. 1, 140–149 (2013). DOI: 10.1134/S0081543813070080.

4. Kolyvagin V. A., “The norm residue symbol in local fields”, *Russian Math. Surveys* **33**(6), 239–240 (1978).

5. Shafarevich I. R., “A general reciprocity law”, *Mat. Sb. (N.S.)* **26(68)**(1), 113–146 (1950).

6. Artin E., Hasse H., “Die beiden Ergänzungssatze zum Reziprozitätsgesetz der lnln-ten Potenzreste im Körper der lnln-ten Einheitswurzeln”, *Abh. Mathem. Seminar* **6**, 146–162 (1928) [in German].

7. Hasse H., *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper* (Reziprozitätsgesetz, Leipzig, Berlin, 1930, **II**) [in German].

8. Hasse H., “Die Gruppe der pnpn-primären Zahlen für einen Primteiler pp von pp”, *J. reine und angew. Math.* **176**, 174–183 (1936) [in German].

9. Hasse H., *Zahlentheorie* (Berlin, 1963) [in German].

10. Hazewinkel M., *Formal Groups and Applications*, in Ser. *Pure Appl. Math.* (Academic Press, New York, 1978, **78**, 478–516).

11. Fröhlich A., *Formal groups*, in Ser. *Lect. Notes Math.* (1968, **74**, 140 p.).

12. Iwasawa K., “On explicit formulas for the norm residue symbol”, *J. Math. Soc. Japan* **20**, 151–164 (1968).

13. Hensel K., “Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers”, *J. reine angew. Math.* **146**, 189–215 (1916) [in German].

14. Lubin J., Tate J., “Formal complex multiplication in local fields”, *Ann. Math.* **81**, 380–387 (1965).

15. Silverman J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*, in Ser. *Graduate Texts in Mathematics* (Springer, 2009, **106**).

Для цитирования: Востоков С. В., Питаль П. Н. Спаривание Гильберта для формальных групп Лоренца // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 201–207. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.203

For citation: Vostokov S. V., Pital' P. N. Hilbert pairing on Lorentz formal group. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 201–207.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.203