УДК 519.214 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 60-03, 60G99

К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. II. Случайные процессы и зависимые величины*

Д. Н. Запорожец[1], *И. А. Ибрагимов*[1,2], *М. А. Лифшиц*[2], *А. И. Назаров*[1,2]

[1] Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН,
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Запорожец Д. Н., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., Назаров А. И.* К истории Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики. II. Случайные процессы и зависимые величины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 367–401. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.303

Вторая статья из серии обзоров о научных достижениях Ленинградской — Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики в период с 1947 по 2017 г. посвящена работам в области предельных теорем для зависимых величин, в частности, цепей Маркова, последовательностей, обладающих свойствами перемешивания, и последовательностей, допускающих мартингальную аппроксимацию, а также различным аспектам теории случайных процессов. Особое внимание уделено гауссовским процессам, включая изопериметрические неравенства, оценки вероятностей малых уклонений в различных нормах и функциональный закон повторного логарифма. Даны краткий обзор и библиография работ в области аппроксимации случайных полей с параметром растущей размерности и вероятностных моделей систем притягивающихся неупругих частиц, в том числе законы больших чисел и оценки вероятностей больших уклонений.

Ключевые слова: предельная теорема для сумм зависимых величин, гауссовские процессы, вероятности малых уклонений, аппроксимация процессов растущей размерности, функциональный закон повторного логарифма, системы притягивающихся частиц.

Данная статья продолжает серию обзоров, посвященных достижениям Ленинградской и Санкт-Петербургской школы теории вероятностей и математической статистики.

Раздел 1 подготовлен И. А. Ибрагимовым, раздел 2.2 — Д. Н. Запорожцем, раздел 4.4 — А. И. Назаровым. Раздел 4.5 написали М. А. Лифшиц и А. И. Назаров. Остальные разделы подготовил М. А. Лифшиц.

1. Предельные теоремы для зависимых случайных величин. ***1.1. Введение.*** Исследование предельного поведения сумм зависимых случайных величин впервые началось в Петербурге в начале прошлого века и потому, хотя вся наша работа посвящена развитию теории вероятностей в Ленинграде — Петербурге со второй половины прошлого столетия, мы немного остановимся на более ранней истории, тем более, что исследование некоторых задач длилось с начала века до его середины и связано с именами крупнейших математиков нашего города: А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, Ю. В. Линника.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00258) и СПбГУ (грант СПбГУ — ННИО 6.65.37.2017).

1.2. Неоднородные цепи Маркова. Математиков Петербургской школы волновал вопрос, могут ли выполняться закон больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ) для сумм зависимых случайных величин. Исследуя эту проблему, А. А. Марков [1] получил ряд глубоких результатов. Прежде всего, он ввел три замечательных класса зависимых случайных величин: последовательности, впоследствии названные *цепями Маркова*, что всем хорошо известно, и, что известно гораздо меньше, *монотонно зависимые величины* и *m-зависимые величины*. Предложение Маркова рассматривать указанные классы зависимостей оказалось исключительно удачным, и все три класса, в особенности первый, до сих пор играют чрезвычайно важную роль и в самой теории вероятностей, и в ее применениях.

А. А. Марков доказал, хотя и при серьезных ограничениях, и ЗБЧ, и ЦПТ для сумм величин, связанных в цепь Маркова. Работу [1] он с полным основанием закончил словами: «Итак, независимость случайных величин не составляет необходимого условия для существования закона больших чисел».

Особую трудность составила задача о сходимости к нормальному закону распределений сумм случайных величин, образующих *неоднородную* цепь Маркова. В работе 1910 г. [2] А. А. Марков рассмотрел последовательность серий неоднородных цепей Маркова $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ с двумя состояниями. Пусть для определенности эти величины принимают значения $0, 1$ с матрицей вероятностей перехода $||{}^n p_{ij}||$. Он доказал, что если

$$\alpha^{(n)} = \inf_{i,j} {}^n p_{ij} \geq \alpha_0 > 0, \tag{1}$$

то дисперсии B_n^2 сумм $\sum_{j=1}^n X_j^{(n)}$ возрастают пропорционально n, распределения нормированных сумм $B_n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j^{(n)} - \mathbb{E} X_j^{(n)})$ сходятся к нормальному закону. А. А. Марков заканчивает свою работу словами «вопрос о возможности сокращения введенных нами ограничений остается открытым».

Не лишенную некоторого драматизма историю этой проблемы мы и перескажем. Задача Маркова чрезвычайно заинтересовала С. Н. Бернштейна, который посвятил ей серию работ. Основной вопрос этих работ сводился к следующему: может ли $\alpha^{(n)}$ в соотношении (1) стремиться к нулю и если да, то как быстро. В первой из этого цикла работ [3, стр. 66–70] С. Н. Бернштейн доказал, что сходимость к нормальному закону сохраняется, если $\alpha^{(n)} n^{1/7} \to \infty$.

В знаменитой работе [3, стр. 121–177], посвященной распространению предельных теорем на суммы зависимых величин общего вида, С. Н. Бернштейн показал, что в случае задачи Маркова сходимость к нормальному закону имеет место, если $\alpha^{(n)} \geq n^{-\alpha}, \alpha < 1/5$. В этой же работе С. Н. Бернштейн построил пример цепей, для которых $\alpha^{(n)} \asymp n^{-1/3}$ и распределения нормированных сумм сходятся к распределению, отличному от нормального.

Наконец, в работах [3, стр. 177–191] и [3, стр. 192–196] (первая из них начинается словами: «Эта первая статья, которую я имею честь представить Академии, имеет целью разрешить одну задачу, которая примыкает к исследованиям А. А. Маркова») С. Н. Бернштейн для цепей с двумя состояниями доказывает сходимость к нормальному распределению в предположении, что $\alpha < 1/3$. Завершающий результат был получен лишь в 1947 г. учеником Бернштейна ленинградским математиком Н. А. Сапоговым [4], доказавшим теорему Маркова в предположении, что в (1) $n^{1/3}\, \alpha^{(n)} \to \infty$.

В перечисленных исследованиях все время предполагалось, что число состояний равнялось двум, и это предположение было существенным. Проблема заключалась в том, что для цепей с бо́льшим числом состояний не удавалось доказать, что дисперсия сумм $\sum_{j=1}^{n} X_{jn}$ с ростом n растет достаточно быстро. Вообще при изучении предельных распределений для сумм зависимых величин анализ роста дисперсии сумм и до сей поры является одним из труднейших и важнейших аспектов проблемы. Лишь в 1936 г. С. Н. Бернштейн, создав новый метод исследования цепей Маркова («метод сечений»), в работе [3, стр. 322–330] установил точные нижние границы дисперсии $B_n^2 = \mathbb{D}\sum_{j=1}^{n} X_{jn}$. Хотя все рассуждения этой работы проводятся для цепей с произвольным конечным множеством состояний, С. Н. Бернштейн замечает, что ее методы и результаты распространяются на цепи с бесконечным и не обязательно дискретным множеством состояний. Соответствующее неравенство для B_n^2 имеет вид

$$B_n^2 \geq b_2 + b_4 + \cdots + b_{2[n/2]}, \quad b_h = \mathbb{D}(X_h | X_{h-1}, X_{h+1}). \tag{2}$$

Основываясь на этих оценках, Н. А. Сапогов [4] доказал, что для цепей с произвольным конечным множеством состояний сходимость распределений нормированных сумм к нормальному закону выполняется, если $\alpha < 1/5$, а Ю. В. Линник [5] после глубокого обобщения метода сечений Бернштейна доказал достаточность условия $\alpha < 1/3$ для цепей с произвольным конечным множеством состояний. Тем самым 40-летняя история исследования задачи Маркова в определенном смысле завершилась.

Отметим еще, что в работах [6, 7] Ю. В. Линника и Н. А. Сапогова сходимость к нормальному распределению была доказана для многомерных неоднородных цепей Маркова.

Условие $\alpha^{(n)} n^{1/3} \to \infty$ означает, по существу, что далеко отстоящие друг от друга участки цепи слабо зависят друг от друга. Переход к произвольному множеству состояний требует другого определения характеристики ослабевания зависимости $\alpha^{(n)}$ между далекими отрезками цепи, что и сделал московский математик Р. Л. Добрушин в замечательной работе [8], введя свой «коэффициент эргодичности». При этом и для общих цепей показатель $\alpha = 1/3$ является правильным пограничным значением. (Заметим, что разработанные Бернштейном методы оценки снизу дисперсии сумм использовались и в этих работах Добрушина.)

Уже в рамках общей концепции Добрушина литовский математик В. А. Статулявичус, обучавшийся во второй половине 1950-х годов в Ленинграде в аспирантуре у Ю. В. Линника, доказал для неоднородных цепей Маркова локальные предельные теоремы [9] и теоремы об асимптотических разложениях в интегральной теореме для неоднородных цепей [10].

В работах [11, 12] Б. А. Лифшиц существенно усилил результаты Добрушина, рассмотрев вместо коэффициента эргодичности Добрушина величину β_n — максимум максимального коэффициента корреляции между соседними величинами n-й серии. Один из его результатов гласит, что если дисперсии величин X_{nj} равномерно ограничены и равномерно отделены от нуля, то условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-\beta_n)^2} \sum_{s=1}^{n} \int_{|y| \geq \varepsilon\sqrt{n}(1-\beta_n)^{3/2}} y^2 dP\{X_{ns} < y\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$ является достаточным для сходимости распределений нормированных сумм величин X_{nj} к нормальному закону. В частности, такая сходимость будет иметь место, если $\lim (1-\beta_n) n^{1/3} = \infty$.

1.3. Метод Бернштейна. В уже цитировавшейся работе [3, стр. 177–191] С. Н. Бернштейн предложил общий метод исследования предельных распределений для сумм зависимых случайных величин, вообще говоря, не связанных марковской зависимостью. Этот метод применим к таким последовательностям случайных величин, зависимость которых при увеличении расстояния между ними в определенном смысле ослабевает, исчезая в пределе. В самых общих чертах метод сводится к следующему. Сумма $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ представляется в виде

$$S_n = T_1 + T_1' + T_2 + T_2' + \cdots ,$$

где

$$T_1 = \sum_{1}^{p} X_j, \quad T_1' = \sum_{p+1}^{p+q} X_j, \quad T_2 = \sum_{p+q+1}^{2p+q} X_j, \quad T_2' = \sum_{2p+q+1}^{2p+2q} X_j, \ldots$$

Здесь $p = p(n) = o(n)$, $q = q(n) = o(p)$. Совокупность коротких сумм предельно пренебрегаема, а длинные суммы T_j, разделенные промежутком длины $q \to \infty$, асимптотически независимы и их можно заменить независимыми величинами $\tilde{T}_j$ равнораспределенными с T_j. Тем самым задача суммирования зависимых величин сводится к задаче суммирования независимых величин. Конечно, реализация этого метода в конкретных случаях связана с преодолением серьезных трудностей (и, разумеется, подходящей формализацией понятия «слабая зависимость»).

Начиная со второй половины 1950-х гг. этот метод в совокупности с новым подходом к определению классов случайных последовательностей, удовлетворяющих тем или иным условиям слабой зависимости, начал широко применяться к исследованию предельных теорем для зависимых величин. Работы в этом направлении появились почти одновременно в США (М. Розенблатт), Москве (В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Ю. А. Розанов), Ленинграде (И. А. Ибрагимов).

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — две σ-алгебры событий. Определим меру зависимости $\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ между ними (по отношению к заданной вероятностной мере) так, чтобы $\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ для независимых σ-алгебр.

Один возможный выбор состоит в том, что полагают

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup |\mathbb{E}\xi\eta|,$$

где верхняя грань берется по всем $\mathfrak{A}$-измеримым величинам ξ и по всем $\mathfrak{B}$-измеримым величинам η таким, что $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, $\mathbb{E}|\xi|^2 = \mathbb{E}|\eta|^2 = 1$. Коэффициент r называется максимальным коэффициентом корреляции между $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Максимальный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами был введен Гебеляйном (H. Gebelein) в 1941 г. Использовать максимальный коэффициент корреляции в задачах суммирования зависимых случайных величин предложил А. Н. Колмогоров.

Величина

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

введенная М. Розенблаттом в 1956 г. [13], называется коэффициентом сильного перемешивания.

Величина

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varphi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} |P(B|A) - P(B)|,$$

введенная И. А. Ибрагимовым в 1959 г. [14], называется коэффициентом равномерно сильного перемешивания.

Пусть $\{X_t\}$ — семейство случайных величин, зависящих от вещественного параметра t; $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра событий, порожденных величинами X_u, $u \le t$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра событий, порожденных величинами X_u, $u \ge t$. Положим

$$\Delta(\tau) = \sup_{t<s, s-t\ge\tau} \Delta(\mathfrak{A}_t, \mathfrak{B}_s)$$

и скажем, что X_t удовлетворяет условию Δ-перемешивания, если $\Delta(\tau) \to 0$, когда $\tau \to \infty$. Заметим, что $\alpha(\tau) \le r(\tau) \le \varphi(\tau)$. Если однородная цепь Маркова удовлетворяет условию Деблина, то для нее $\varphi(\tau)$ стремится к нулю экспоненциально быстро. Стационарная гауссовская последовательность со строго положительной непрерывной спектральной плотностью $f(\lambda)$ удовлетворяет условию α-перемешивания (А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов). Если же $f(\lambda)$ имеет разрывы первого рода или нули положительного порядка, не являющегося целым четным числом, то условие α-перемешивания не выполняется (И. А. Ибрагимов [15]).

В работах И. А. Ибрагимова [14, 16–18] исследовались собственные предельные распределения для нормированных сумм $S_n = B_n^{-1} \sum_1^n X_j - A_n$ в предположении, что последовательность $\{X_j\}$ стационарна и $B_n \to \infty$. Эти условия предполагаются выполненными в формулируемых ниже теоремах.

Теорема 1.1. *Если X_j удовлетворяет условию α-перемешивания, то предельное распределение для S_n необходимо устойчиво. Если при этом показатель устойчивого предельного распределения равен α, то $B_n = n^{1/\alpha}h(n)$, $h(n)$ — медленно меняющаяся функция n.*

Теорема 1.2. *Если последовательность X_j удовлетворяет условию r-перемешивания, причем $\mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$ для какого-нибудь $\delta > 0$, то к последовательности X_j применима ЦПТ.*

Теорема 1.3. *Если последовательность X_j удовлетворяет условию r-перемешивания, причем $\mathbb{E}|X_j|^2 < \infty$ и $\sum_1^\infty r(2^n) < \infty$, то к последовательности X_j применима ЦПТ, при этом $B_n^2 \sim 2\pi n f(0)$, $f(\lambda)$ — спектральная плотность стационарной последовательности X_j.*

Теорема 1.4. *Пусть последовательность X_j удовлетворяет условию α-перемешивания и выполняются условия: 1) $\mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $\sum \big(\alpha(n)\big)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$. Тогда к последовательности X_j применима ЦПТ и*

$$B_n^2 \sim n \left(\sum \mathbb{E}|X_0|^2 + 2 \sum_1^\infty \mathbb{E} X_0 X_j \right).$$

В какой степени точны условия приведенных выше теорем? В работах [19, 20] Ю. А. Давыдов исследовал скорость убывания коэффициентов перемешивания для однородных цепей Маркова, удовлетворяющих условию Харриса. Оценки коэффициентов перемешивания, полученные Давыдовым, позволили ему построить примеры, показывающие, что связь между условиями 1 и 2 теоремы 1.4 является точной. Конструкция этих примеров заключалась в следующем. В качестве X_j Ю. А. Давыдов рассмотрел однородные возвратные цепи Маркова с длинными временами возвращения τ_i из состояния i в состояние i. В работах 1930-х гг. В. Деблин показал, что в случае длинных времен возвращения нормированные суммы S_n могут иметь устойчивое предельное распределение, отличное от нормального. Отправляясь от этих работ, с помощью тонких вычислений Давыдов показал, что можно построить величины X_j с таким коэффициентом $\alpha(n)$, для которого условия 1 и 2 теоремы 1.4 нарушаются как угодно мало, а предельные распределения для S_n существуют и не являются нормальными. Тем самым было доказано, что условия теоремы 1.4 являются точными. Позднее американский математик Р. Брэдли сконструировал примеры, из которых следует, что условия теорем 1.2, 1.3 тоже являются точными (см. [21]).

В [18] И. А. Ибрагимов высказал гипотезу, что в случае φ-перемешивания ЦПТ всегда выполняется, если $\mathbb{E}X_j^2 < \infty$ и $\mathbb{D}S_n \to \infty$. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. Лучший результат здесь принадлежит М. Пелиград, доказавшей утверждение гипотезы при дополнительном предположении $\liminf n^{-1}\mathbb{D}S_n > 0$.

1.4. Процессы, порожденные процессами с перемешиванием. Пусть X_t — стационарный случайный процесс с дискретным или непрерывным временем, удовлетворяющий условию Δ-перемешивания. Обозначим $\mathfrak{M}_s^t$, $s \le t$, σ-алгебру событий, порожденную величинами X_u, $s \le u \le t$; $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$.

Обозначим H_s^t семейство $\mathfrak{M}_s^t$-измеримых случайных величин Y, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}|Y|^2 < \infty$. Стационарный процесс X_t определяет в H группу унитарных операторов U^t и $Y_t = U^t Y$ есть стационарный процесс. Назовем его процессом, порожденным процессом X_t.

Если $Y \in H_{-\tau}^{\tau}$, $0 < \tau < \infty$, процесс Y_t удовлетворяет условию Δ-перемешивания. Если же Y — элемент H общего вида, то Y_t не обязан удовлетворять никаким условиям перемешивания, даже если $\{X_t\}$ — последовательность независимых случайных величин. Если, однако, Y допускает хорошую аппроксимацию величинами из $H_{-\tau}^{\tau}$, можно ожидать, что к Y_t применима ЦПТ. Эти вопросы впервые рассмотрел И. А. Ибрагимов в [14, 16] (см. также [18, 22]). В этих работах указываются взаимные ограничения на скорость убывания коэффициента перемешивания, точность аппроксимации Y величинами из $H_{-\tau}^{\tau}$ и число моментов Y. Вот пример подобных результатов.

Теорема 1.5. *Пусть стационарная последовательность X_j удовлетворяет условию φ-перемешивания. Рассмотрим порожденную последовательность вида $Y_j = U^j Y$, где $Y \in H$, $\mathbb{E}Y = 0$. Пусть выполняются условия:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{E}\{|Y - \mathbb{E}\{Y|\mathfrak{M}_{-k}^{k}\}|^2\}|^{\frac{1}{2}} < \infty; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(k)} < \infty.$$

Тогда $\sigma^2 = \mathbb{E}Y_0^2 + 2\sum_1^{\infty} \mathbb{E}Y_0 Y_j < \infty$ и, если $\sigma \ne 0$, то распределение нормированных сумм $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_1^n X_j$ сходится к нормальному закону.

Сходные результаты имеют место и для других условий перемешивания.

Пусть $\dots\xi_0, \xi_1, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $Y = f(\dots\xi_0, \xi_1, \dots)$. Вопрос о применимости ЦПТ к суммам Y_j не является тривиальным. Пусть, например, ξ_j — стандартные нормальные величины. Пусть $Y_j = Z_j^2 - \mathbb{E}Z_j^2$, $Z_j = \sum_{-\infty}^{-1} \xi_{k+j}/|r|^a$, $3/4 > a > 1/2$. Тогда предельное распределение нормированных сумм величин Y_j отлично от нормального

(М. Розенблатт, см. [18]). Отсюда, в частности, следует, что условия теоремы 1.5 достаточно точны и не могут быть улучшены.

1.5. Принцип инвариантности (функциональные предельные теоремы). В работе [23] 1968 г. Ю. А. Давыдов задался вопросом, в каких случаях к суммам зависимых случайных величин с перемешиванием применим принцип инвариантности (т. е. в каких случаях меры P_n в $\mathbb{C}[0,1]$, порожденные (непрерывными) случайными ломаными с вершинами в точках $\left(k/n, B_n^{-1}\sum_1^k(X_j - \mathbb{E}X_j)\right)$ сходятся в $\mathbb{C}[0,1]$ к распределению винеровского процесса. По-видимому, [23] — это вообще первая работа, посвященная исследованию принципа инвариантности для сумм величин с перемешиванием. Ю. А. Давыдов, в частности, доказал, что принцип инвариантности выполняется в условиях теоремы 1.4, если условие 2 этой теоремы заменить условием $\sum_n(\alpha)^{\delta/2(2+\delta)} < \infty$.

Позднее, в работе [24], Ю. А. Давыдов распространил эти результаты на случай процессов, порожденных процессами с перемешиванием. В [17] И. А. Ибрагимов доказал принцип инвариантности в условиях теоремы 1.2. Ученик Ю. А. Давыдова В. В. Городецкий в работе [25] распространил результаты Давыдова на стационарные поля, удовлетворяющие условию α-перемешивания. Последнее означает, что коэффициент сильного перемешивания между σ-алгебрами, порожденными участками поля с аргументами, принадлежащими множествам V_1, V_2, стремится к нулю, когда расстояние между V_1 и V_2 стремится к бесконечности.

1.6. Скорость сходимости. Традиционный для теории суммирования независимых случайных величин вопрос о скорости сходимости допредельной функции распределения к предельной для последовательностей случайных величин с перемешиванием вызывает серьезные трудности. Достаточно точные результаты были получены лишь для некоторых классов случайных величин, связанных в цепь Маркова (см., например, работу Б. А. Лифшица [12], где для сумм величин, связанных в цепь Маркова, доказаны оптимальные по порядку оценки вида $O(1/\sqrt{n})$). Конечно, упомянутый выше метод Бернштейна вместе с оценками, справедливыми для сумм независимых величин, позволяет получить степенные по числу слагаемых оценки, но они далеки от желаемых. Легко понять, что непосредственное применение метода Бернштейна не может привести к оценкам лучшим, чем $n^{-1/4}$. Прорыв был совершен работой [26] американского математика Ч. Стейна. В начале 1970-х гг. Ч. Стейн был гостем Ленинградского отделения института им. В. А. Стеклова и прочел там цикл лекций о своих исследованиях. А. Н. Тихомиров, в те годы аспирант кафедры теории вероятностей, находясь под влиянием этих лекций, занялся задачей о скорости сходимости в ЦПТ для зависимых величин, удовлетворяющих условию α-перемешивания. В предположении, что $\mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \le 1$, Тихомиров [27, 28] получил очень хорошие оценки для равномерного расстояния ρ_n между допредельной и предельной функциями распределения, зависящие от скорости убывания $\alpha(n)$. Так, если $\alpha(n) = O(e^{-an})$, $a > 0$, то $\rho_n = O(n^{-\delta/2}\ln^{1+\delta} n)$, что лишь на логарифмический множитель отличается от оптимальной оценки $O(n^{-\delta/2})$. А. Н. Тихомиров писал впоследствии, что его результат получен методом Стейна, что не совсем так. Действительно, идеи метода Стейна были использованы, но в сильно модифицированном виде. Достаточно заметить, что [28] существенно использует аппарат характеристических функций, тогда как Ч. Стейн в [26] вообще подвергает сомнению возможность использовать этот аппарат при исследовании скорости убывания ошибки аппроксимации для сумм слабо зависимых случайных величин.

В работе [29] В. В. Городецкий получил оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для последовательностей с сильным перемешиванием. В случае быстрого убывания коэффициента перемешивания его результаты сравнимы с оценками в принципе инвариантности для сумм независимых величин.

1.7. Закон повторного логарифма. В работе [30] Н. А. Сапогов, по-видимому, впервые рассмотрел задачу о применимости закона повторного логарифма к слабо зависимым в духе работ С. Н. Бернштейна величинам. При этом Н. А. Сапогов предложил новый очень удобный метод для получения верхних границ для сумм $\sum_1^n X_j$, действующий в случае, если для нормированных сумм выполняется ЦПТ со скоростью сходимости $n^{-\gamma}$ для какого-нибудь $\gamma > 0$. Этот прием упрощает доказательство даже в случае независимых слагаемых X_j.

В работе [31] М. Х. Резник, используя этот подход Сапогова, доказал закон повторного логарифма для стационарных последовательностей, удовлетворяющих условиям φ- и α-перемешивания. Вот одна из теорем Резника.

Теорема 1.6. *Если величины X_j удовлетворяют условию φ-перемешивания и выполнены условия: $\mathbb{E}|X_j|^p < \infty$ для какого-нибудь $p > 2$; $\sum_n \sqrt{\varphi}(n) < \infty$ и $\mathbb{D}(\sum_1^n X_j) \to \infty$, то к последовательности X_j применим закон повторного логарифма.*

Аналогичные результаты М. Х. Резник получил и для стационарных последовательностей, порожденных последовательностями с перемешиванием.

1.8. Метод мартингальной аппроксимации (метод Гордина). Первые варианты ЦПТ для мартингалов были доказаны во второй половине 30-х гг. прошлого столетия П. Леви и С. Н. Бернштейном [3, стр. 364–376, 380–385]. Анализ работ Бернштейна приводит к мысли, что он полагал возможным использовать подходящую аппроксимацию мартингалами для доказательства ЦПТ для зависимых величин. В начале 1960-х гг. П. Биллингсли и И. А. Ибрагимов [32] доказали ЦПТ для эргодических стационарных последовательностей $\{X_j\}$, состоящих из мартингал-разностей (т. е. $\mathbb{E}(X_j|X_{j-1},\dots) = 0$, так что суммы $S_n = \sum_1^n X_j$ образуют мартингал) и такой, что $\mathbb{E}X_j^2 < \infty$. Работа [32] использовала некоторые идеи из цитировавшихся выше работ Бернштейна.

Осуществить же идею использования мартингальной аппроксимации удалось М. И. Гордину, в то время аспиранту кафедры теории вероятностей, в его замечательной работе [33]. В этой работе был предложен подход к исследованию предельных теорем для сумм стационарно связанных слабо зависимых случайных величин, основанный на так называемом представлении стационарной последовательности $\{X_j\}$ в виде суммы мартингала и кограницы

$$X_n = Y_n + \zeta_n\,, \tag{3}$$

где величины Y_n образуют последовательность мартингал-разностей, а кограница $\zeta = \{\zeta_n\}$ может быть записана в виде $\zeta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ с некоторой стационарной последовательностью $\theta = \{\theta_n\}$. Коль скоро представление (3) получено, достаточно сослаться на цитированную выше теорему Биллингсли—Ибрагимова. Конечно, найти представление (3) в конкретных случаях совсем не просто, но это решаемая задача. Введенный в обиход короткой заметкой [33] метод мартингальной аппроксимации последние полвека наряду с упомянутым выше методом Бернштейна играл решающую роль в доказательстве предельных теорем для зависимых величин.

Так, из результатов работы [33] достаточно просто выводятся предельные теоремы для процессов с перемешиванием, например, теорема 1.4. В работе [34] М. И. Гордин предложил неожиданный вариант своего метода, не требующий конечности вторых моментов. В обеих работах Гордин ограничился кратким изложением своих фундаментальных результатов. Их детальное изложение можно найти в монографиях [35, гл. 5; 21, т. 2]. Работы [36–40] содержат очень успешное применение метода мартингальной аппроксимации к исследованию ЦПТ для однородных цепей Маркова, не удовлетворяющих обычным условиям регулярности.

В работе [41] содержится глубокое исследование асимптотического поведения статистик фон Мизеса для сохраняющих меру преобразований. Именно, пусть T — сохраняющее меру преобразование вероятностного пространства $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Статистика фон Мизеса с ядром $f : X^d \to \mathbb{R}$ определяется как случайная величина

$$x \in X \to \sum_{0 \le i_1, \ldots, i_d \le n} f(T^{i_1}x, \ldots, T^{i_d}x), \quad n \ge 1.$$

Последнее определение требует некоторого обоснования, поскольку ограничение функции f на диагональ не вполне определено. Разрешив эту проблему, авторы доказывают для статистик фон Мизеса эргодическую теорему (усиленный закон больших чисел) с нормирующим множителем n^{-d}. Наконец, применение метода мартингальной аппроксимации позволяет при определенных предположениях об ядре доказать ЦПТ в случае точных преобразований T.

Эта работа содержит много новых идей и должна оказать большое влияние на будущих исследователей.

Детальное изложение упомянутых здесь результатов можно найти в монографиях [18, 35] и особенно в фундаментальном трехтомном труде [21].

И. А. Ибрагимов и Ю. В. Линник за работы по предельным теоремам теории вероятностей были удостоены (совместно с Ю. В. Прохоровым и Ю. А. Розановым) Ленинской премии 1970 г.

2. Гауссовские случайные процессы. ***2.1. Классические результаты.*** Несколько фундаментальных результатов теории гауссовских процессов были получены в Ленинграде. Все они связаны с именем В. Н. Судакова [42–44]. Наряду с Ф. Штрассеном и Р. Дадли его можно считать основоположником метрического подхода к изучению случайных процессов, когда свойства гауссовского процесса $X(t)$, $t \in T$, заданного на параметрическом множестве T произвольной природы, изучаются при помощи полуметрики $\rho(s,t) = \{\mathbb{E}(X(s) - X(t))^2\}^{1/2}$. Например, если T в этой метрике является сепарабельным, то на том же вероятностном пространстве существует сепарабельная модификация процесса X (см., например, [45, предложение 4.1]). В связи с этим в дальнейшем все рассматриваемые процессы мы будем считать сепарабельными во избежание вопросов, связанных с измеримостью различных функционалов, таких как $\sup_{t \in T} X(t)$ и пр.

Результаты Судакова не только чрезвычайно полезны, но и поразительны своей общностью. О лидерской роли Судакова в этот «героический» период развития теории гауссовских процессов рассказано в недавней статье Дадли [46].

Первым фундаментальным результатом здесь является теорема сравнения гауссовских процессов по их ковариациям (Fernique—Sudakov comparison principle): *если два центрированных гауссовских случайных процесса X, Y, заданных на одном па-*

раметрическом множестве T, удовлетворяют свойству

$$\mathbb{E}(X(t)-X(s))^2 \geq \mathbb{E}(Y(t)-Y(s))^2, \qquad s,t\in T,$$

то

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X(t) \geq \mathbb{E}\sup_{t\in T} Y(t). \tag{4}$$

Сравнивая таким образом произвольный центрированный гауссовский процесс $X(t)$, $t\in T$, и семейство независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин, получаем знаменитую оценку снизу для максимума, известную во всем мире как «Sudakov minoration», которая утверждает, что для любого $\varepsilon>0$

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X(t) \geq C\,(\ln M(\varepsilon))^{1/2}\varepsilon,$$

где $C = 0.648$ — абсолютная константа, $M(\varepsilon)$ — максимальное количество точек в пространстве (T,ρ), удаленных друг от друга на расстояние не меньше ε.

Наконец, еще одним выдающимся достижением этого периода является изопериметрическое неравенство для гауссовских мер, полученное одновременно и независимо В. Н. Судаковым и Б. С. Цирельсоном в Ленинграде [47] и К. Бореллем в Швеции. Оно утверждает, что для стандартной гауссовской меры P в $\mathbb{R}^n$ среди всех множеств равной меры наименьшую площадь поверхности имеет полупространство. Формально этот геометрический по своей природе факт может быть выражен следующим образом. Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ — полупространство, и $P(A)=P(\Pi)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ верно $P(A^\varepsilon)\geq P(\Pi^\varepsilon)$, где A^ε, Π^ε обозначают ε-окрестности соответствующих множеств.

Важно отметить, что применение изопериметрического неравенства содержательно не только при малых ε, где оно позволяет сравнивать меры тонких полосок, окружающих множества, но и при больших ε, где оно играет важную роль в вычислении асимптотики гауссовских вероятностей больших уклонений.

Из изопериметрического неравенства следует еще один исключительно полезный факт, отмеченный Судаковым и Цирельсоном — принцип концентрации. Если функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x)-f(y)|\leq\sigma|x-y|, \qquad x,y\in\mathbb{R}^n,$$

а m — медиана распределения значений f относительно меры P, то для любого $r>0$ верно неравенство

$$\max\left[P\{x: f(x)\leq m-r\}, P\{x: f(x)\geq m+r\}\right] \leq \mathbb{P}(\sigma\xi\geq r),$$

где ξ — стандартная нормальная случайная величина. Таким образом, распределение f сконцентрировано вокруг своей медианы не менее сильно, чем соответствующее нормальное распределение.

Среди других работ по гауссовским процессам отметим две статьи Б. С. Цирельсона о естественной модификации [48, 49]. Он показал, что среди всех модификаций гауссовского процесса имеется одна, обладающая особенно хорошими свойствами. Например, ее траектории будут п. н. непрерывными в определенной разумной метрике на параметрическом множестве.

В середине девяностых годов XX века теория гауссовских процессов достигла такого уровня полноты, что назрел вопрос о ее систематическом изложении. Это было сделано в монографии М. А. Лифшица [45] (см. также курс лекций [50]).

2.2. Связь с внутренними объемами. Еще один замечательный результат Судакова связывает первый внутренний объем V_1 выпуклого тела в гильбертовом пространстве с максимумом изонормального гауссовского процесса над этим множеством. Напомним, что изонормальный процесс над сепарабельным гильбертовым пространством H — это гауссовский процесс $X(t)$, $t \in H$, с ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}(X(s), X(s)) = \langle t, s \rangle.$$

В [44, предложение 14] было показано, что для произвольного выпуклого компактного множества $T \subset H$ выполнено

$$V_1(T) = \sqrt{2\pi}\, \mathbb{E} \sup_{t \in T} X(t). \tag{5}$$

Отметим, что (4) было получено Судаковым как прямое следствие данного представления и чисто геометрического утверждения о том, что если после некоторого упорядочивания ребра одного многомерного симплекса не превосходят по длине ребер другого, то то же неравенство выполнено и для их первых объемов (см. [44, теорема 2]).

Соотношение (5) было использовано в [51] для вычисления первых внутренних объемов различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа (шар Штрассена и др.) и эллипсоиды в гильбертовом пространстве.

В [52] Цирельсон обобщил (5) на все внутренние объемы V_k следующим образом. Рассмотрим k независимых копий $X_i(t)$, $t \in H$, $1 \le i \le k$, изонормального процесса $X(t)$. Назовем k-мерным спектром выпуклого компактного множества $T \subset H$ следующее случайное множество в $\mathbb{R}^k$:

$$\operatorname{spec}_k T := \{(X_1(t), \ldots, X_k(t)) \in \mathbb{R}^k : t \in T\}. \tag{6}$$

Цирельсон показал, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого выпуклого компактного множества $T \subset H$, такого что $V_1(T) < \infty$, выполнено

$$V_k(T) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbb{E}\, \lambda_k(\operatorname{spec}_k T). \tag{7}$$

Данный результат может быть интерпретирован как бесконечномерный аналог формулы Куботы. Следующее соотношение, также полученное Цирельсоном в [52], является бесконечномерным аналогом формулы Штейнера: для любого $r > 0$ и любого выпуклого компактного множества $T \subset H$, такого что $V_k(T) < \infty$, выполнено

$$\mathbb{E} \exp\left(\sup_{t \in T} \left[rX(t) - \frac{r^2}{2} \operatorname{Var} X(t) \right] \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\sqrt{2\pi}} \right)^k V_k(T).$$

В качестве примера отметим, что из (7) сразу же вытекает связь между внутренними объемами выпуклой оболочки спирали Винера и средним объемом выпуклой оболочки многомерного броуновского движения, а также аналогичный результат для броуновского моста (подробности см. в [51]).

Пусть теперь T является правильным симплексом. Нетрудно заметить, что его спектр (6) является гауссовским многогранником (выпуклой оболочкой конечного числа независимых стандартных гауссовских векторов). Тем самым, зная поведение внутренних объемов правильного симплекса, можно получить информацию о среднем объеме гауссовского многогранника и наоборот, что и было проделано в [53]. Дальнейшие свойства гауссовских многогранников были изучены в [54].

3. Функциональный закон повторного логарифма (ФЗПЛ). В работе Штрассена [55] было описано предельное поведение с вероятностью единица некоторых семейств случайных функций, порожденных винеровским процессом $W(t)$, $t \geq 0$. Рассмотрим пространство непрерывных функций $\mathbb{C}[0,1]$, снабженное равномерной нормой $\|\cdot\|$. «Шар Штрассена» $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}[0,1]$ определим как множество всех абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, заданных на $[0,1]$, удовлетворяющих условиям $x(0) = 0$ и

$$\int_0^1 x'(t)^2 dt \leq 1.$$

Обозначим $L_T := 2 \ln \ln T$ при $T > 3$ и определим случайные функции

$$Z_T(t) = W(Tt)/(T\, L_T)^{1/2}, \qquad t \in [0,1],\ T > 3.$$

Классический ФЗПЛ Штрассена утверждает, что с вероятностью единица семейство $(Z_T)_{T>3}$ относительно компактно и расстояние

$$\rho(Z_T, \mathbb{K}) := \inf_{x \in \mathbb{K}} ||Z_T - x||$$

стремится к нулю при $T \to \infty$. С другой стороны, для любого $h \in \mathbb{K}$ верно

$$\liminf_{T\to\infty} ||Z_T - h|| = 0.$$

Таким образом, множество предельных точек семейства (Z_T) в пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ совпадает с $\mathbb{K}$.

Этот результат включает в себя и обычный закон повторного логарифма, т. е.

$$\limsup_{T\to\infty} W(T)/(T\, L_T)^{1/2} = 1.$$

Следующий более трудный вопрос касается попадания Z_T в ε_T-окрестности $\mathbb{K}$ при ε_T, стремящемся к нулю, когда T стремится к бесконечности. Грилл [56] и Талагран [57] независимо показали, что

$$0 < \limsup_{T\to\infty} \rho(Z_T, \mathbb{K}) L_T^{2/3} < \infty.$$

ФЗПЛ остается верным, если винеровский процесс заменить процессом частных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин X_j с нулевым средним и единичными дисперсиями. А именно, положим

$$S(t) = \sum_{j \leq t} X_j + (t - [t]) X_{[t]+1}, \qquad t \geq 0,$$

и

$$\widetilde{Z}_n(t) = S(nt)/(n\,L_n)^{1/2}, \qquad t \in [0,1],\ n \geq 3.$$

Тогда для $(\widetilde{Z}_n)$ выполнены те же утверждения, что и для (Z_T).

Среди многочисленных обобщений и уточнений закона Штрассена можно выделить работы М. А. Лифшица, выполненные совместно с Ф. Берте (Ph. Berthet), А. В. Булинским, Н. Горн (N. Gorn), П. Деовельсом (P. Deheuvels).

В работах [58, 59] полностью исследован вопрос о том, для каких норм (вместо равномерной) выполняется закон Штрассена для винеровского процесса. Пусть $\mathcal{N}(\cdot)$ — полунорма на $\mathbb{C}[0,1]$, полунепрерывная снизу относительно топологии равномерной сходимости. Допускается, что $\mathcal{N}$ может иметь бесконечные значения. Тогда ФЗПЛ для винеровского процесса верен для этой полунормы в том и только в том случае, когда при некотором $\varepsilon > 0$ верно

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq\theta\leq\varepsilon} \mathcal{N}(W_\theta) < \infty\right) > 0,$$

где $W_\theta(x) := W((1-\theta)x)$ (см. [59, теорема 1.1]).

Парадоксальным образом скорость сходимости в ФЗПЛ для процесса частных сумм может быть несколько лучше, чем указанная выше скорость $L_T^{-2/3}$ для винеровского процесса. Пусть $G(\cdot)$ — неубывающая положительная непрерывная функция, заданная на $[0,\infty)$. Тогда условие

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(\widetilde{Z}_n, \mathbb{K}) \frac{L_n^{3/4}}{G(L_n)} < \infty$$

выполнено для некоторой последовательности (X_j) в том и только в том случае, когда

$$\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)^4} < \infty.$$

Таким образом, скорость сближения с шаром Штрассена $L_n^{-3/4}(\ln L_n)^\alpha$ возможна при $\alpha > 1/4$ и невозможна при $\alpha \leq 1/4$ (см. [60]).

В работе [61] найдены моментные условия, обеспечивающие заданную скорость сходимости в ФЗПЛ для процесса частных сумм. Приведем результат, касающийся «медленной» скорости сходимости в диапазоне от $L_n^{-1/2}$ до $L_n^{-2/3}$. Пусть $V(\cdot)$ — такая непрерывная функция, заданная на положительной полупрямой, что в некоторой окрестности бесконечности функция $\lambda \mapsto V(\lambda)\lambda^{1/2}$ не возрастает, а функция $\lambda \mapsto V(\lambda)\lambda^{2/3}$ не убывает. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\rho(\widetilde{Z}_n, \mathbb{K})}{V(L_n)} < \infty$$

равносильно моментному условию

$$\mathbb{E}\,\frac{|X_1|^2}{V(L(|X_1|))^2 L(|X_1|)} < \infty,$$

где $L(x) := \ln_+ \ln_+ x$.

В работах [62] и [63] исследуется скорость приближения к конкретному элементу шара Штрассена. Здесь ситуация различна для элементов, находящихся «внутри» или «на границе» шара. Для внутренних элементов $h \in \mathbb{K}$, т. е. удовлетворяющих условию

$$J(h) := \int_0^1 h'(t)^2 dt < 1,$$

Э. Чаки (E. Csáki) показал, что

$$\liminf_{T\to\infty} L_n ||Z_T - h|| = \frac{\pi}{2\sqrt{1-J(h)}}\,.$$

Для граничных элементов, для которых $J(h) = 1$, скорость может быть различной, в пределах от L_n^{-1}, как в формуле Чаки, до $L_n^{-2/3}$.

В работе [63] исследован случай граничных функций, чья производная имеет ограниченную вариацию. Здесь скорость сближения будет наименьшей возможной:

$$\liminf_{T\to\infty} (L_n)^{2/3} ||Z_T - h|| = c(h),$$

где $c(h) \in (0, \infty)$ является решением некоторого уравнения в терминах второй производной функции h.

В работе [62] разработан метод нахождения скорости сближения для функций с бесконечной вариацией производной. Ограничимся характерным примером, который долгое время не поддавался анализу. Пусть $\alpha \in (1/2, 1)$. Положим

$$h_\alpha(t) := b_\alpha t^\alpha, \qquad 0 \le t \le 1,$$

где константа $b_\alpha := \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$ выбрана так, что $J(h_\alpha) = 1$. Тогда

$$\liminf_{T\to\infty} L_n^{2\alpha/(4\alpha-1)} ||Z_T - h|| = \left[\frac{(\pi^2/8)^\alpha (2\alpha-1)^{\alpha-1/2}}{\alpha^{2\alpha-1}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right]^{1/(4\alpha-1)}.$$

Степени $2\alpha/(4\alpha - 1)$ заполняют весь возможный диапазон $(2/3, 1)$.

4. Вероятности малых уклонений. Типичной задачей исследования вероятностей малых уклонений (или мер малых шаров) является изучение асимптотического поведения вероятностей вида $\mathbb{P}(||X|| \le \varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, для некоторого случайного вектора X, принимающего значения в нормированном пространстве $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$. Вероятности малых уклонений в первую очередь характеризуют тонкую структуру распределений случайных процессов, но они также появляются в байесовской статистике, в теории дискретизации сигналов (quantization), тесно связаны с различными проблемами функционального анализа, касающимися аппроксимации линейных операторов.

Первой работой ленинградской школы, посвященной анализу вероятностей малых уклонений, была статья И. А. Ибрагимова [64]. Дальнейшее развитие этой тематики связано с работами М. А. Лифшица, А. И. Назарова, Я. Ю. Никитина и их учеников.

В связи с тем, что задачи теории малых уклонений и применяемые для их решения методы очень многообразны, мы приведем лишь наиболее типичные и значимые результаты, а некоторые направления только упомянем, отсылая читателя к существующей литературе (см. также обзор [65]).

4.1. Суммы независимых величин. Пусть $S := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j X_j$, где λ_j — положительные числа, X_j — независимые копии положительной случайной величины X. Задача о малых уклонениях в данном случае состоит в изучении вероятностей $\mathbb{P}(S \le \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Интерес к этой постановке возник потому, что квадрат нормы любого центрированного гауссовского вектора записывается в таком виде, причем в качестве X выступает квадрат стандартной нормальной величины. Однако оказалось, что природа X совершенно не важна, равно как и поведение коэффициентов λ_j. Приведем основной результат из [66] в улучшенной формулировке из [67].

Для $\gamma > 0$ положим

$$\Lambda(\gamma) := \mathbb{E}e^{-\gamma S}; \quad m(\gamma) := -(\ln \Lambda)'(\gamma); \quad \sigma^2(\gamma) := (\ln \Lambda)''(\gamma).$$

Будем говорить, что X удовлетворяет условию регулярности, если существуют такие постоянные $b \in (0,1)$, $c_1, c_2 > 1$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ верно

$$c_1 \mathbb{P}(X \le b\varepsilon) \le \mathbb{P}(X \le \varepsilon) \le c_2 \mathbb{P}(X \le b\varepsilon). \tag{8}$$

Теорема 4.1. *Пусть X удовлетворяет условию регулярности* (8) *и условию стохастической компактности Феллера*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^2 \mathbb{P}(X \ge r)}{\mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{\{X \le r\}})} < \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(0 < S \le \varepsilon) = \frac{e^{\gamma\varepsilon}\Lambda(\gamma)}{\gamma\sigma(\gamma)\sqrt{2\pi}}\ (1 + o(1)) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где γ является решением уравнения $m(\gamma) = \varepsilon$.

Очевидным недостатком этого результата является то, что ключевой параметр γ задан неявно. В [68] при небольших дополнительных предположениях регулярности получены более явные результаты. Ввиду их громоздкости, мы не будем приводить их здесь, а ограничимся одним важным примером.

Предложение 4.2. *Пусть $A > 1$ и независимые одинаково распределенные случайные величины $X, \{X_j\}$ удовлетворяют условию регулярности* (8), *а также условию*

$$\int_0^\infty |(t(\ln \Lambda_X)')'(t)|dt < \infty,$$

где $\Lambda_X(t) := \mathbb{E}\exp\{-tX\}$. Тогда существуют такие $\alpha > 0$ и медленно меняющаяся на бесконечности функция $\ell(\cdot)$, что $P(X \le \varepsilon) = \varepsilon^\alpha \ell(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и имеет место асимптотика

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-A} X_j \le \varepsilon\right) \sim C\ \frac{\varepsilon^{(1+\alpha A)/(2(A-1))}}{\ell(\varepsilon^{-a})^{1/2}} \exp\left(-\frac{(A-1)K^a}{A^a}\,\varepsilon^{-1/(A-1)}\right),$$

где $a := A/(A-1)$,

$$K := \int_0^\infty t^{-1/A} |(\ln \Lambda)'(t)| dt,$$

а константа C явным образом зависит от A, α, K.

Отметим, что в работах Л. В. Розовского [69–76] задача о малых уклонениях S рассмотрена и для других ситуаций, например, когда условие регулярности не выполнено, либо выполняются дополнительные предположения о поведении коэффициентов λ_j. В [77] рассмотрен случай суммирования взвешенных зависимых величин.

4.2. Процессы Римана—Лиувилля. Вопрос о том, как асимптотика малых уклонений зависит от используемой нормы, является трудной задачей. Укажем один важный класс норм и процессов, для которых влияние нормы удалось описать количественно (см. [78]).

Пусть $\mathcal{I}$ — класс всех замкнутых ограниченных интервалов на $\mathbb{R}$. Рассмотрим некоторое линейное пространство вещественных функций $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}$. Пусть для каждого $I \in \mathcal{I}$ задано такое линейное пространство вещественных функций $\mathcal{F}_I$ на I, что $f_I \in \mathcal{F}_I$ для каждого $f \in \mathcal{F}$, где f_I обозначает сужение f на I.

Определим полунорму $||\cdot||$ на $\mathcal{F}$ как семейство полунорм $\{||\cdot||_I,\ I \in \mathcal{I}\}$, удовлетворяющих следующим естественным условиям:

(A) $||\cdot||_I \le ||\cdot||_J$ для всех таких $I, J \in \mathcal{I}$, что $I \subset J$;

(B) $||f||_{I-c} = ||f(\cdot - c)||_I$ для всех $f \in \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{I}$ и $c \in \mathbb{R}$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in (0, +\infty]$ и $||\cdot||$ — полунорма на $\mathcal{F}$. Будем называть ее (β, p)-полунормой, если выполнены следующие свойства:

(C) $||f(c\,\cdot)||_{I/c} = c^{\beta}\ ||f||_I$ для всех $f \in \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{I}$ и всех $c > 0$;

(D) для всех $a_0 < \ldots < a_n \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{F}$

$$||f||_{[a_0,a_n]} \ge \left\{||f||^p_{[a_0,a_1]} + \cdots + ||f||^p_{[a_{n-1},a_n]}\right\}^{1/p}, \qquad \text{если } p < +\infty,$$

или

$$||f||_{[a_0,a_n]} \ge \max\left\{||f||_{[a_0,a_1]}, \ldots, ||f||_{[a_{n-1},a_n]},\right\}, \qquad \text{если } p = +\infty.$$

Здесь β характеризует самоподобие полунормы, а p — ее полуаддитивность.

Практически все интересные полунормы удовлетворяют этому определению с некоторыми параметрами, если положить $\mathcal{F} = \{f : \|f\|_I < \infty, I \in \mathcal{I}\}$.

Сюда относятся супремум-норма, L_p-норма с $p \ge 1$, α-гельдеровская полунорма с $0 \le \alpha \le 1$, соболевская полунорма, заданная выражением

$$||f||_I := \left\{\int_I\int_I \left(\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{\eta+1/p}}\right)^p ds\,dt\right\}^{1/p}, \quad p \ge 1, \quad 0 \le \eta + 1/p < 1,$$

а также полунормы Бесова и многие другие.

Пусть $\{Z_t,\ t \ge 0\}$ — симметричный α-устойчивый процесс Леви с $\alpha \in (0, 2]$. Тогда для каждого $H > 0$ определен процесс $R^H_t := \int_0^t (t-s)^{H-1/\alpha} dZ_s$, который мы назовем процессом Римана—Лиувилля с параметром Херста H. Например, m-кратный интеграл от винеровского процесса относится к этому классу и имеет параметры $\alpha = 2$ и $H = m + 1/2$.

Теорема 4.3. *Пусть* $||\cdot||$ — (β, p)*-полунорма и* R — *процесс Римана—Лиувилля с параметром* $H > \beta + 1/p$. *Положим* $\gamma := (H - \beta - 1/p)^{-1}$. *Тогда существует такое* $K \in (0, +\infty]$, *что*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\gamma} \ln \mathbb{P}\left\{||R||_{[0,1]} \le \varepsilon\right\} = -K.$$

Интересно, что индекс устойчивости α непосредственно не влияет на порядок малых уклонений γ.

Формально константа K может быть бесконечной. Но если параметр p выбран правильно, то есть наименьшим возможным для данной нормы, то порядок малых уклонений γ, указанный в теореме 4.3, является правильным для всех известных примеров норм.

Полученные результаты можно распространить и на класс самоподобных процессов (односторонние линейные устойчивые дробные движения), которые можно рассматривать как одно из обобщений дробного броуновского движения на негауссовский устойчивый случай.

4.3. Гауссовские стационарные процессы. Одним из интересных направлений является изучение асимптотик вероятностей малых уклонений стационарных процессов в терминах их спектров. Особенно интересен случай очень гладких процессов, поскольку соответствующие малые уклонения фактически определяют апостериорную скорость сходимости в непараметрических задачах оценивания, а сами процессы служат стандартными базовыми элементами при построении априорных распределений параметров, имеющих функциональную природу.

Рассмотрим семейство процессов X_ν, отвечающих абсолютно непрерывным спектральным мерам

$$\begin{aligned} F_\nu(du) &:= \exp\{-|u|^\nu\}\, du, \qquad 0<\nu<\infty, \\ F_\infty(du) &:= \mathbf{1}_{\{[-1,1]\}}\, du, \end{aligned}$$

и аналогичное семейство периодических процессов $\widetilde{X}_\nu$, отвечающих дискретным спектральным мерам

$$\widetilde{F}_\nu(du) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\{-|k|^\nu\}\delta_{2\pi k}, \qquad 0<\nu<\infty.$$

Хотя свойства гладкости процессов X_ν, $\widetilde{X}_\nu$ одинаковы, их малые уклонения иногда ведут себя по-разному. Приведем результаты из [79], касающиеся вероятностей малых уклонений в равномерной норме на интервале $[0,1]$.

Теорема 4.4. *При $\varepsilon \to 0$ справедливы соотношения*

$$\ln \mathbb{P}(||X_\nu||_\infty \le \varepsilon) \approx -\frac{|\ln\varepsilon|^2}{\ln|\ln\varepsilon|}, \qquad 1<\nu\le\infty, \tag{9}$$

и

$$\ln \mathbb{P}(||X_\nu||_\infty \le \varepsilon) \approx -|\ln\varepsilon|^{1+\frac{1}{\nu}}, \qquad 0<\nu\le 1. \tag{10}$$

Существенная разница между оценками (9) и (10) заключается в том, что во втором случае имеется зависимость от параметра ν, а в первом ее нет, что следует признать несколько неожиданным. Впрочем, в спектральной теории операторов аналогичный эффект уже давно известен.

Для периодических процессов асимптотика несколько иная.

Теорема 4.5. *При $\varepsilon \to 0$ справедливы соотношения*

$$\ln \mathbb{P}(||\widetilde{X}_\nu||_\infty \le \varepsilon) \approx -|\ln\varepsilon|^{1+\frac{1}{\nu}}, \qquad \nu>0.$$

Для процессов со спектром, убывающим степенным образом, малые уклонения также изучены достаточно хорошо. Приведем характерные результаты о малых уклонениях в L_2-норме из недавней работы [80].

Теорема 4.6. *Пусть* $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ — 2π*-периодический вещественный центрированный гауссовский стационарный процесс, непрерывный в среднем квадратическом. Предположим, что его спектральная мера имеет асимптотику*

$$\mu_k \sim M|k|^{-r} \quad \text{при } |k| \to \infty$$

при некоторых $r > 1$, $M > 0$. *Пусть* $q(\cdot)$ — *суммируемый вес на интервале* $[0, 2\pi]$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *верно*

$$\ln \mathbb{P}\left(\int\limits_0^{2\pi} q(t)|X(t)|^2 dt \le \varepsilon^2\right) \sim -\left(\frac{M^{\frac{1}{r}}}{r\sin(\pi/r)}\int\limits_0^{2\pi} q(t)^{\frac{1}{r}}dt\right)^{\frac{r}{r-1}} \frac{(r-1)(2\pi)^{\frac{1}{r-1}}}{2\,\varepsilon^{\frac{2}{r-1}}}.$$

Аналогичный результат верен и для процессов, имеющих спектральную плотность со степенной асимптотикой.

Теорема 4.7. *Пусть* $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ — *вещественный центрированный гауссовский стационарный процесс, непрерывный в среднем квадратическом. Предположим, что его спектральная плотность существует и имеет асимптотику*

$$m(u) \sim M|u|^{-r} \quad \text{при } |u| \to \infty$$

при некоторых $r > 1$, $M > 0$. *Пусть* $q(\cdot)$ — *суммируемый вес на* $\mathbb{R}$, *удовлетворяющий условию*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|q\|_{1,[j,j+1]}^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

где

$$\|q\|_{1,[a,b]} := \int_a^b |q(t)|dt.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ *верно*

$$\ln \mathbb{P}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} q(t)|X(t)|^2 dt \le \varepsilon^2\right) \sim -\left(\frac{M^{\frac{1}{r}}}{r\sin(\pi/r)}\int\limits_{\mathbb{R}} q(t)^{\frac{1}{r}}dt\right)^{\frac{r}{r-1}} \frac{(r-1)(2\pi)^{\frac{1}{r-1}}}{2\,\varepsilon^{\frac{2}{r-1}}}.$$

Отметим, что доказанные для стационарных процессов утверждения мгновенно переписываются для α-самоподобных процессов (например, для винеровского процесса, дробного броуновского движения и их кратных интегралов, см. [81–83]) при помощи преобразования Ламперти $X(t) \rightleftharpoons Y(t) = e^{-\alpha t}X(e^t)$. Близкие к приведенным теоремам результаты получены для малых уклонений в L_p-нормах с $p \ne 2$, но возникающая там константа не имеет явного выражения.

Интересный результат о малых уклонениях стационарных процессов с финитной корреляционной функцией содержится в [84].

4.4. Гриновские гауссовские процессы. В последние годы А. И. Назаров, Я. Ю. Никитин и их ученики глубоко исследовали вероятности малых уклонений в гильбертовой норме. Особенно плодотворным было выделение А. И. Назаровым [85–87] класса *гриновских* гауссовских процессов, чьи ковариационные функции являются функциями Грина обыкновенных дифференциальных операторов (ОДО). Поскольку спектральная теория ОДО развита существенно сильнее, чем соответствующая теория для интегральных операторов общего вида, для таких процессов удалось получить гораздо более продвинутую теорию вероятностей малых уклонений в гильбертовой норме, дающую во многих случаях точную асимптотику.

В работах [88–94] были получены точные асимптотики для большого количества конкретных гриновских гауссовских процессов. В работах [95, 96] были рассмотрены весовые L_2-нормы для широкого класса невырожденных весов.

Наконец, в [97, 98] были установлены точные асимптотики вероятностей малых уклонений для одномерных возмущений гриновских процессов.

4.5. Другие результаты о малых уклонениях. Интересные результаты были получены для гауссовских полей в нормах, связанных с фрактальными множествами или мерами (см. [99–104]). Заметим, что и в этой задаче для гриновских процессов в гильбертовой норме удается исследовать более тонкую структуру логарифмической асимптотики малых уклонений (см. [99–101, 104], а также серию работ А. А. Владимирова и И. А. Шейпака).

В работах [105–107] изучались гауссовские поля со структурой тензорного произведения. При различных, весьма общих, предположениях о процессах-сомножителях была получена логарифмическая асимптотика малых уклонений в L_2 с весом. Недавно Л. В. Розовский [108] существенно обобщил результаты Дж. Филла и Ф. Торказо (J. A. Fill, F. Torcaso) [109] о точной асимптотике малых уклонений в L_2 броуновского листа.

А. И. Назаров [110] доказал теорему сравнения на логарифмическом уровне для малых уклонений в гильбертовой норме при минимальных ограничениях на функцию распределения собственных чисел оператора ковариации (ранее при более жестких ограничениях аналогичный результат был получен Ф. Гао и В. Ли (F. Gao, W. V. Li)) [111].

Пусть λ_n, $n \in \mathbb{N}$, — собственные числа оператора ковариации случайного вектора X в гильбертовом пространстве. Определим *считающую функцию*

$$\mathcal{N}(\lambda) = \#\{n \ : \ \lambda_n > \lambda\}.$$

Аналогично определим $\widetilde{\lambda}_n$ и $\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda)$ для случайного вектора $\widetilde{X}$.

Предположим, что

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{hx} \mathcal{N}(\lambda)\ d\lambda}{\int\limits_0^{x} \mathcal{N}(\lambda)\ d\lambda} > 1 \qquad \text{при всех} \qquad h > 1.$$

Если $\mathcal{N}(\lambda) \sim \widetilde{\mathcal{N}}(\lambda)$ при $\lambda \to 0$, то

$$\ln \mathbf{P}\{\|X\| \le r\} \sim \ln \mathbf{P}\{\|\widetilde{X}\| \le r\} \qquad \text{при} \qquad r \to 0.$$

В работах [112, 113] исследовались вероятности малых уклонений пуассоновских процессов высокой интенсивности. Было выяснено, в каких пределах эти вероятности ведут себя так же, как их аналоги для винеровского процесса. В [114] приведено обобщение на случай более общих процессов Леви. В статьях [115–117] изучены вероятности малых уклонений различных итерированных процессов. В [118] исследованы малые уклонения обобщенных процессов восстановления. Вероятности малых уклонений симметричных устойчивых векторов изучены в [119]. В [120] рассмотрены малые уклонения сумм коррелированных гауссовских последовательностей. В [121] даны применения вероятностей малых шаров к задаче дискретизации (квантования) случайных процессов.

5. Аппроксимация случайных полей растущей размерности. Во многих практических приложениях, таких как финансы, статистика, физика, изучаются случайные поля с большой размерностью параметрического множества и их аппроксимации. В связи с этим естественно рассматривать и асимптотические постановки задач аппроксимации, когда размерность d параметрического множества стремится к бесконечности. Обычно проблему аппроксимации решают с некоторой точностью ε, используя при этом конечное число значений линейных функционалов от аппроксимируемого. Назовем сложностью аппроксимации (information complexity) величину $n(\varepsilon, d)$, обозначающую минимальное число значений, необходимых для достижения точности аппроксимации ε.

Со многими постановками задач такого рода можно познакомиться в трехтомнике Э. Новака и Х. Вожняковского [122]. Данное направление в Санкт-Петербурге развивалось в работах М. А. Лифшица с соавторами [123–125] и его учеников Н. А. Сердюковой [126] и А. А. Хартова [127–131].

Во многих многомерных задачах проявляется проклятие размерности, то есть экспоненциальная зависимость $n(\varepsilon, d)$ от размерности d. Естественной задачей является количественное описание этого феномена. Приведем один наиболее характерный результат из работы [125], описывающий проклятие размерности в задачах аппроксимации случайных полей. Рассмотрим центрированное случайное поле $X(t)$, $t \in [0,1]^d$, с конечной дисперсией и тензорной структурой ковариации

$$cov(X(s), X(t)) = \prod_{l=1}^{d} R(s_l, t_l), \quad s = (s_l)_{1 \le l \le d}, \quad t = (t_l)_{1 \le l \le d} \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда X допускает каноническое разложение

$$X(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \xi_k \prod_{l=1}^{d} \lambda(k_l) \prod_{l=1}^{d} \phi_{k_l}(t_l),$$

где $(\lambda(i))_{i>0}$ — корни собственных чисел оператора с ядром $R(\cdot,\cdot)$; $(\phi_i)_{i>0}$ — соответствующие собственные функции; $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^d}$ — некоррелированные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Рассмотрим качество оптимальной аппроксимации X процессами конечного ранга n

$$X_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \ \psi_j(t)$$

с детерминированными функциями ψ_j и случайными величинами η_j. Будем измерять качество аппроксимации с помощью квадратичной ошибки, измеренной в норме

$|| \cdot ||_2$ пространства $L_2([0,1]^d)$:

$$\mathbb{E}\|X - X_n\|_2^2 \searrow \min .$$

Решением этой задачи будет часть канонического разложения, отвечающая n максимальным собственным числам.

Соответственно, обозначим

$$n^{avg}(\varepsilon) := \inf \left\{ n : \mathbb{E}||X - X_n||_2^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

и назовем эту величину сложностью аппроксимации в среднем.

Задача состоит в том, чтобы, зная собственные числа $(\lambda(i))_{i>0}$, найти асимптотическое поведение $n^{avg}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим решение этой задачи в растущей размерности, то есть при меняющемся $d \nearrow \infty$. Предположим, что собственные числа удовлетворяют условию

$$D := \sum_{i=1}^{\infty} |\ln \lambda(i)|^2 \lambda(i)^2 < \infty.$$

Положим

$$\mathbb{E}\|X\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2 \right)^d := \Lambda^d.$$

Рассмотрим *относительную* сложность аппроксимации

$$\widetilde{n}^{avg}(\varepsilon, d) := \inf \left\{ n : \mathbb{E}||X - X_n||_2^2 \leq \varepsilon^2 \Lambda^d \right\},$$

где, как и ранее, X_n обозначает n-членную часть канонического разложения, отвечающую n максимальным собственным числам. Тогда при фиксированном ε сложность $\widetilde{n}^{avg}(\varepsilon, d)$ возрастает экспоненциально по d (этот феномен часто называют *проклятием размерности*). Положим

$$M := -\sum_{i=1}^{\infty} \ln \lambda(i) \; \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}$$

и определим коэффициент экспоненциального роста

$$\mathcal{E} := \Lambda \; e^{2M} > 1.$$

Тогда верен следующий результат (см. [125, теорема 3.2]).

Теорема 5.1. *Для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *верно*

$$\lim_{d \to \infty} \frac{\ln \widetilde{n}^{avg}(\varepsilon, d) - d \ln \mathcal{E}}{\sqrt{d}} = 2q,$$

где $q = q(\varepsilon, (\lambda(i))_i)$ *— квантиль стандартного нормального закона* Φ*, удовлетворяющая уравнению* $\Phi(q/\sigma) = 1 - \varepsilon^2$ *и* $\sigma^2 := D - M^2$.

Для доказательства этой теоремы необходимо связать поведение детерминистического массива собственных чисел тензорного произведения с центральной предельной теоремой для подходящим образом выбранной вспомогательной последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

Можно также измерять сложность аппроксимации не в среднем, а по вероятности. При этом в широкой зоне параметров задачи поведение обоих видов сложности аппроксимации будет одинаковым.

Помимо количественного анализа проклятия размерности интерес представляет нахождение условий, при которых оно отсутствует. Такая ситуация может быть названа *посильностью* задачи (tractability). Существует несколько вариантов этого свойства. Последовательность задач аппроксимации называется

- *слабо посильной*, если

$$\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty} \frac{\ln\,\max\left(1, n^{avg}(\varepsilon,d)\right)}{\varepsilon^{-1}+d} = 0;$$

- *квази-полиномиально посильной*, если для некоторых положительных C и M верно

$$n^{avg}(\varepsilon,d) \le C\,\exp\Big(M\,(1+\ln\,d)\,(1+\ln\,\varepsilon^{-1})\Big) \quad \text{при всех} \quad d=1,2,\ldots,\ \ \varepsilon\in(0,1);$$

- *полиномиально посильной*, если существуют такие неотрицательные C, q и p, что

$$n^{avg}(\varepsilon,d) \le C\,d^q\,\varepsilon^{-p} \qquad \text{при всех} \quad d=1,2,\ldots,\ \ \varepsilon\in(0,1);$$

- *равномерно полиномиально посильной*, если для некоторых положительных C и p верно

$$n^{avg}(\varepsilon,d) \le C\,\varepsilon^{-p} \qquad \text{при всех} \quad d=1,2,\ldots,\ \ \varepsilon\in(0,1).$$

Рассмотрим эти свойства применительно к аппроксимации центрированных случайных полей $X(t)$, $t\in[0,1]^d$, с конечной дисперсией и тензорной структурой ковариации

$$cov(X(s),X(t)) = \prod_{k=1}^{d} R_k(s_k,t_k), \qquad s=(s_k)_{1\le k\le d},\ t=(t_k)_{1\le k\le d}\in\mathbb{R}^d.$$

Пусть $(\lambda(k,j))_{j\ge1}$ — корни собственных чисел оператора с ядром $R_k(\cdot,\cdot)$, пронумерованные в порядке убывания.

Следующие критерии получены в [124].

Теорема 5.2. *Последовательность задач аппроксимации является*

- *слабо посильной, если для некоторого* $\tau\in(0,1)$ *верно*

$$\lim_{d\to\infty} d^{-1}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda(k,j)}{\lambda(k,1)}\right)^{\tau} = 0;$$

- *квази-полиномиально посильной тогда и только тогда, когда при некотором* $\delta \in (0,1)$ *верно*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{d} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(k,j)^{1-\frac{\delta}{\ln_+ d}}}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(k,j)\right)^{1-\frac{\delta}{\ln_+ d}}} < \infty;$$

- *полиномиально посильной тогда и только тогда, когда при некотором* $\tau \in (0,1)$ *верно*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{k=1}^{d} \ln \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda(k,j)}{\lambda(k,1)}\right)^{\tau}\right) < \infty;$$

- *равномерно полиномиально посильной тогда и только тогда, когда при некотором* $\tau \in (0,1)$ *верно*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda(k,j)}{\lambda(k,1)}\right)^{\tau} < \infty.$$

6. Стохастические системы притягивающихся частиц. В работах М. А. Лифшица, В. В. Высоцкого, В. Ф. Захаровой, Л. В. Куозы [132–137] изучались одномерные модели гравитационного газа, состоящего из большого числа частиц, которые в начальный момент имеют случайные скорости и координаты, а затем начинают двигаться, подчиняясь силам взаимного притяжения. При столкновениях частицы слипаются, образуя «кластеры».

Опишем модель более строго. В начальный момент в интервале $[0,1]$ имеется n частиц, и система исследуется асимптотически при $n \to \infty$.

В зависимости от начального расположения частиц можно выделить *решетчатую* модель (частицы располагаются на решетке с шагом $1/n$), *пуассоновскую* (частицы располагаются в точках пуассоновской конфигурации с интенсивностью n) и *независимую* (частицы располагаются в точках выборки из n независимых наблюдений, равномерно распределенных на $[0,1]$).

Начальные скорости частиц имеют вид $v_i(0) = \sigma_n u_i$, $1 \le i \le n$, где (u_i) — независимые одинаково распределенные величины с единичной дисперсией.

Массы частиц детерминированы и равны ρn^{-1} каждая, где $\rho > 0$ — фиксированная константа, которая в пределе дает плотность распределения массы.

Сила притяжения, действующая на частицу массы m, расположенную в точке x, со стороны частицы массы μ, расположенной в точке y, равна $F = \gamma\, m\, \mu\ \mathrm{sign}(y-x)$, где $\gamma > 0$ играет роль гравитационной постоянной. Подчеркнем, что в одномерной модели сила притяжения не зависит от расстояния между частицами. В промежутках между столкновениями частицы движутся равноускоренно согласно второму закону Ньютона ($F = m\frac{d^2x}{dt^2}$). При столкновении частицы слипаются, сохраняя суммарную массу и импульс.

Обозначим $L_n(t)$ размер наибольшего кластера в момент времени t в системе из n начальных частиц.

Время коллапса — это момент, когда все частицы слипнутся в единый кластер, т. е. $L_n(t) = n$. В холодном газе (т. е. при $u_i = 0$) времена коллапса сходятся к критическому времени $T^* := (\gamma\rho)^{-1/2}$. При ненулевых начальных скоростях значение

T^* по-прежнему является критическим в том смысле, что при любом $t > T^*$ верно $\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{n} = 1$ по вероятности.

Размеры кластеров в моменты, предшествующие критическому, описываются следующим результатом из [135].

Теорема 6.1. *Предположим, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n^{-1}\log n} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n^{1/2}} = 0, \tag{11}$$

и что скорости u_i удовлетворяют условию $\mathbb{E}\exp\{a|u_i|\} < \infty$ с некоторым $a > 0$. Тогда для любой из трех моделей (решетчатой, пуассоновской или независимой) для любого $t < T^*$ верно

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{(n\sigma_n)^{2/3}\left(\log\left(\frac{n}{\sigma_n^2}\right)\right)^{1/3}} \geq c_1(t) \quad \text{по вероятности,}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n(t)}{(n\sigma_n)^{2/3}(\log(n\sigma_n^{2/5}))^{1/3}} \leq c_2(t) \quad \text{по вероятности,}$$

где

$$c_1(t) := 2\left(\frac{t}{1-\gamma\rho t^2}\right)^{2/3}, \qquad c_2(t) := (20/3)^{1/3} c_1(t).$$

В базовом случае $\sigma_n = 1$ получаем оценку $L_n(t) \approx n^{2/3}(\log n)^{1/3}$.

Если условие $\mathbb{E}\exp\{a|u_i|\} < \infty$ ослабить до $\mathbb{E}\left[\,|u_i|^p\,\right] < \infty$, то небольшое число частиц с высокими начальными скоростями может существенно повлиять на поведение $L_n(t)$. Однако, если p достаточно велико, теорема 6.1 останется верной, но в более узкой зоне дисперсии начальных скоростей, чем (11).

В этой же модели было изучено асимптотическое поведение количества кластеров и асимптотика суммарной энергии газа. В частности, В. В. Высоцким охарактеризован эффект мгновенного охлаждения теплого газа.

В работе [136] найден функциональный принцип больших уклонений для событий достаточно общего вида, связанных с рассматриваемыми системами частиц. Мы не будем приводить здесь общую формулировку принципа, но проиллюстрируем его применение на примере вероятностей уклонений значений двух важных физических характеристик. Рассматривается решетчатая модель с параметрами $\rho = 1$, $\gamma = 0$ и предполагается, что

$$\mathbb{E}(u_i) = 0, \qquad \Lambda(h) := \mathbb{E}\exp(hu_i) < \infty \text{ при всех } h \in \mathbb{R}.$$

Определим *функцию уклонений* как

$$I(v) := \sup_{h\in\mathbb{R}} (vh - \log\Lambda(h)).$$

Пусть $\mathbb{A}_{n,t,M}$ — событие, состоящее в том, что отмеченная частица в момент времени t содержится в кластере, состоящем из не менее M слипшихся частиц.

Умеренные и большие уклонения массы (вероятности появления необычно больших кластеров) описываются формулами

$$\log\mathbb{P}(\mathbb{A}_{n,t,M_n}) \sim -\frac{1}{24}\,\frac{nM_n^3}{(t\sigma_n)^2}\,, \quad 1 \ll \frac{\sigma_n}{M_n} \ll \sqrt{n},$$

$$\log \mathbb{P}(\mathbb{A}_{n,t,M_n}) \sim -\left(\frac{t}{\mu}\ \inf_c \int_c^{c+\mu/t} I(x)dx\right) n\mu\sigma_n, \quad M_n = \mu\sigma_n,\ \mu \in (0,\infty).$$

Другой пример связан с E_t — суммарной кинетической энергией частиц в момент времени t, большие уклонения которой описываются формулой

$$\log \mathbb{P}(E_t \geq a_n) \sim -\frac{na_n}{\sigma_n^2}, \qquad 1 \ll \frac{\sigma_n}{a_n^{1/3}} \ll \sqrt{n}.$$

Интересно, что эта асимптотика не зависит от t.

Заключение. Ленинградская — Санкт-Петербургская школа теории вероятностей внесла значительный вклад в развитие теории суммирования зависимых случайных величин и теории случайных процессов. Естественным продолжением затронутых нами тем являются исследования процессов со слабой зависимостью и распределений стохастических функционалов, в частности, изучение функционалов от броуновского движения. Об этом будет рассказано в следующем выпуске данной серии статей.

Литература

1. *Марков А. А.* Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Изв. физ.-мат. общ. при Казанском ун-те. 1907. Т.15, № 4. С. 135–156.

2. *Марков А. А.* Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь // Зап. Акад. наук. 1910. Т. 25, № 3. С. 1–33.

3. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений: в 4 т. Т. IV. М.: Наука, 1964.

4. *Сапогов Н. А.* О сингулярных цепях Маркова // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. С. 193–196.

5. *Линник Ю. В.* К теории неоднородных цепей Маркова // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1949. Т. 13. С. 65–94.

6. *Линник Ю. В., Сапогов Н. А.* Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1949. Т. 13. С. 533–566.

7. *Сапогов Н. А.* О многомерных неоднородных цепях Маркова // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 2. С. 133–135.

8. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1, № 1. С. 72–89; № 4. С. 365–425.

9. *Статулявичус В. А.* О локальной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 4. С. 516–519.

10. *Статулявичус В. А.* Асимптотическое разложение для неоднородных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 206.

11. *Лифшиц Б. А.* О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 4. С. 797–799.

12. *Лифшиц Б. А.* О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 2. С. 295–312.

13. *Rosenblatt M.* A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. Vol. 42, N 1. P. 43–47.

14. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле процессов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 4. С. 711–714.

15. *Ибрагимов И. А.* О спектральных функциях некоторых классов стационарных гауссовских процессов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. С. 1046–1048.

16. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1962. Т. 7, № 4. С. 361–392.

17. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$ // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12, № 4. С. 655–665.

18. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

19. *Давыдов Ю. А.* О свойстве сильного перемешивания для цепей Маркова со счетным числом состояний // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 2. С. 252–254.

20. *Давыдов Ю. А.* Условия перемешивания для цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18, № 2. С. 321–338.

21. *Bradley R. C.* Introduction to Strong Mixing Conditions. Vol. 1–3. Heber City: Kendrick Press, 2007.

22. *Ибрагимов И. А.* Замечание о центральной предельной теореме для зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20, № 1. С. 134–140.

23. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13, № 4. С. 730–737.

24. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15, № 3. С. 498–509.

25. *Городецкий В. В.* Принцип инвариантности для стационарных случайных полей с сильным перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, № 2. С. 358—364.

26. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // Proc. Sixth Berkeley Symp. Prob. Stat. Univ. of California Press. 1972. Vol. 2. P. 583–602.

27. *Тихомиров А. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Вестник ЛГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 1976. Т. 7, № 4. С. 158–159.

28. *Тихомиров А. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 4. С. 800–818.

29. *Городецкий В. В.* О скорости сходимости в принципе инвариантности для последовательностей с сильным перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 4. С. 780–785.

30. *Сапогов Н. А.* Закон повторного логарифма для сумм зависимых величин // Ученые записки Ленинградского ун-та. Сер. Математика. 1950. Вып. 19. С. 160–179.

31. *Резник М. Х.* Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13, № 4. С. 642–656.

32. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1963. Т. 8, № 1. С. 89–94.

33. *Гордин М. И.* О центральной предельной теореме для стационарных процессов // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 4. С. 739–741.

34. *Гордин М. И.* Центральная предельная теорема без предположения о конечности дисперсии // Междунар. конф. по теор. вер. и математ. статистике, Вильнюс, 1973, 25-30 июня. Тезисы сообщений. Т. 1: А-К, 1973. С. 173–174.

35. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theory and Its Application. Academic Press, 1980.

36. *Гордин М. И., Лифшиц Б. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов Маркова // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 4. С. 865–866.

37. *Гордин М. И., Лифшиц Б. А.* Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 766–767.

38. *Гордин М. И., Лифшиц Б. А.* Центральная предельная теорема для марковских процессов с нормальным оператором перехода. В кн.: А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий. Труды Мат. инст. им. Стеклова. Т. 195. М.: Наука, 1994. С. 181–195.

39. *Gordin M.* CLT for stationary normal Markov chains via generalized coboundaries. In Ser.: Springer Proc. in Math. and Statistics. Vol. 42. Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory. Berlin: Springer, 2015.

40. *Gordin M., Holzmann H.* The central limit theorem for stationary Markov chains under invariant splittings // Stoch. Dyn. 2004. Vol. 4, N 1. P. 15–30.

41. *Denker M., Gordin M.* Limit theorems for fon Mises statistics of a measure preserving transformation // Probab. Theory Rel. Fields. 2014. Vol. 160, N 1–2. P. 1–40.

42. *Судаков В. Н.* Меры Гаусса, Коши и ε-энтропия // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 1. С. 51–53.

43. *Судаков В. Н.* Гауссовские случайные процессы и меры телесных углов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 1. С. 43–45.

44. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1976. Т. 141. С. 3–191.

45. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВiМС, 256 с.

46. *Dudley R. M.* V. N. Sudakov's work on expected suprema of Gaussian processes // High Dimensional Probability VII. In: Progress in Probability. Vol. 71. Birkhäuser, Springer, 2016. P. 37–43.

47. *Судаков В. Н., Цирельсон Б. С.* Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1974. Т. 41. С. 14–41.

48. *Цирельсон Б. С.* Естественная модификация случайного процесса и ее приложение к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 55. С. 35–63.

49. *Цирельсон Б. С.* Дополнение к статье о естественной модификации // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 72. С. 202–211.

50. *Лифшиц М. А.* Лекции по гауссовским процессам. Лань, 2016.

51. *Kabluchko Z., Zaporozhets D.* Intrinsic volumes of Sobolev balls with applications to Brownian convex hulls // Trans. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 368. P. 8873–8899.

52. *Цирельсон Б. С.* Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига. II // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30. С. 772–779.

53. *Kabluchko Z., Zaporozhets D.* Expected volumes of Gaussian polytopes, external angles, and multiple order statistics. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/1706.08092 (дата обращения: 11.04.2018).

54. *Kabluchko Z., Zaporozhets D.* Absorption probabilities for Gaussian polytopes, and regular spherical simplices. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/1704.04968 (дата обращения: 11.04.2018).

55. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1964. Vol. 3, N 3. P. 211–226.

56. *Grill K.* Exact rate of convergence in Strassen's law of iterated logarithm // J. Theor. Probab. 1992. Vol. 5, N 1. P. 197–205.

57. *Talagrand M.* On the rate of clustering in Strassen's LIL for Brownian motion // Proc. Conf. Probability in Banach Spaces VIII, Birkhäuser. 1993. P. 339–347.

58. *Deheuvels P., Lifshits M.* Strassen-type functional laws for strong topologies // Probab. Theory Rel. Fields. 1993. Vol. 97. P. 151–167.

59. *Deheuvels P., Lifshits M.* Necessary and sufficient condition for the Strassen law of the iterated logarithm in non-uniform topologies // Ann. Probab. 1994. Vol. 22. P. 1838–1856.

60. *Булинский А. В., Лифшиц М. А.* Наилучшая скорость сходимости в законе Штрассена для случайных ломаных // Вестник МГУ. 1995. № 5. С. 37–42.

61. *Булинский А. В., Лифшиц М. А.* Оценка скорости сходимости в законе Штрассена для случайных ломаных // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1996. Т. 228. С. 57–66.

62. *Berthet Ph., Lifshits M. A.* Some exact rates in the functional law of the iterated logarithm // Ann. Inst. H. Poincaré. 2002. Vol. 38, N 6. P. 811–824.

63. *Gorn N., Lifshits M. A.* Chung law and Csáki function // J. Theor. Probab. 1999. Vol. 12. P. 399–420.

64. *Ибрагимов И. А.* О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1979. Т. 85. С. 75–93.

65. *Lifshits M. A.* Asymptotic behavior of small ball probabilities // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference, 1998, Vilnius, VSP/TEV. 1999. P. 453–468.

66. *Lifshits M. A.* On the lower tail probabilities of some random series // Ann. Probab. 1997. Vol. 25. P. 424–442.

67. *Розовский Л. В.* О вероятностях малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2007. Т. 341. С. 151–167.

68. *Dunker Th., Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations of sums of independent variables // Proc. Conf. High Dimensional Probability. Ser. Progress in Probability, 1998, Birkhäuser. 1999. Vol. 43. P. 59–74.

69. *Розовский Л. В.* О малых уклонениях сумм взвешенных положительных случайных величин // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2010. Т. 384. С. 212–224.

70. *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин, плотность распределения которых имеет степенное убывание в нуле // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 396. С. 195–203.

71. *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин с медленно меняющимся в нуле распределением // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 412. С. 237–251.

72. *Розовский Л. В.* О малых уклонениях рядов независимых неотрицательных случайных величин с гладкими весами // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58, № 1. С. 133–151.

73. *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений взвешенной суммы независимых случайных величин с общим распределением, убывающим в нуле не быстрее степени // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2014. Т. 431. С. 178–185.

74. *Розовский Л. В.* Малые уклонения взвешенной суммы независимых положительных случайных величин с общим распределением, убывающим в нуле не быстрее степени // Теория вероятн. и ее примен. 2015. Т. 60, № 1. С. 178–186.

75. *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений суммы независимых положительных случайных величин, общее распределение которых убывает в нуле не быстрее степени // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2016. Т. 454. С. 254–260.

76. *Розовский Л. В.* Вероятности малых уклонений взвешенной суммы независимых случайных величин с общим распределением, имеющим степенное убывание в нуле, при минимальных моментных предположениях // Теория вероятн. и ее примен. 2017. Т. 62, № 3. С. 610–616.

77. *Hong S. Y., Lifshits M. A., Nazarov A. I.* Small deviations in L_2-norm for Gaussian dependent sequences // Electronic Comm. Probab. 2016. Vol. 21, N 41. P. 1–9.

78. *Lifshits M. A., Simon Th.* Small deviations for fractional stable processes // Ann. Inst. H. Poincaré. 2005. Vol. 41. P. 725–752.

79. *Аурзада Ф., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., ван Зантен Х.* Малые уклонения гладких стационарных гауссовских процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53, № 4. С. 788–798.

80. *Lifshits M. A., Nazarov A. I.* L_2-small deviations for weighted stationary processes // Mathematika. 2018. Vol. 64. Iss. 2. P. 387–405. https://doi.org/10.1112/S0025579317000572

81. *Назаров А. И., Никитин Я. Ю.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений в L_2-норме для некоторых дробных гауссовских процессов // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49, № 4. С. 695–711.

82. *Lifshits M. A., Linde W.* Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 157, N 745. P. 1–87.

83. *Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations of weighted fractional processes and average nonlinear approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 357. P. 2059–2079.

84. *Цирельсон Б. С.* О стационарных гауссовских процессах с финитной корреляционной функцией // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 184. С. 279–288.

85. *Назаров А. И.* О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов // Проблемы матем. анализа. 2003. Вып. 26. С. 179–214.

86. *Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Probab. Theory Relat. Fields. 2004. Vol. 129, N 4. P. 469–494.

87. *Nazarov A. I.* Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems // J. Theoret. Probab. 2009. Vol. 22, N 3. P. 640–665.

88. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2009. Т. 364. С. 166–199.

89. *Никитин Я. Ю., Орсингер Э.* Точная асимптотика малых уклонений процессов Слепяна и Ватсона в гильбертовой норме // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 320. С. 120–128.

90. *Никитин Я. Ю., Харинский П. А.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 214–221.

91. *Пусев Р. С.* Асимптотика малых уклонений процессов Боголюбова в квадратичной норме // Теор. мат. физ. 2010. Т. 165, № 1. С. 134–144.

92. *Пусев Р. С.* Асимптотика малых уклонений в весовой квадратичной норме для полей и процессов Матерна // Теор. вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55, № 1. С. 187–195.

93. *Beghin L., Nikitin Ya. Yu., Orsingher E.* Exact small ball constants for some Gaussian processes under L_2-norm // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 298. С. 5–21.

94. *Kirichenko A. A., Nikitin Ya. Yu.* Precise small deviations in L_2 of some Gaussian processes appearing in the regression context // Cent. Eur. J. Math. 2014. Vol. 12, N 11. P. 1674–1686.

95. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Теоремы сравнения для вероятностей малых уклонений весовых L_2-норм гриновских гауссовских процессов // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 3. С. 131–146.

96. *Никитин Я. Ю., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений для ряда броуновских функционалов // Теор. вероятн. и ее примен. 2012. Т. 57, № 1. С. 98–123.

97. *Назаров А. И.* Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 209–225.

98. *Назаров А. И., Петрова Ю. П.* Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца—Кифера—Вольфовица // Теория вероятн. и ее примен. 2015. Т. 60, № 3. С. 482–505.

99. *Назаров А. И.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских случайных процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 190–213.

100. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма—Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 425. С. 86–98.

101. *Растегаев Н. В.* О спектре задачи Штурма—Лиувилля с арифметически самоподобным весом. Препринт СПбМО 2017-06. URL: http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2017/17-06.pdf (дата обращения: 11.04.2018).

102. *Lifshits M. A., Linde W., Shi Z.* Small deviations of Gaussian random fields in L_q-spaces // Electron. J. Probab. 2006. Vol. 11, N 46. P. 1204–1223.

103. *Lifshits M. A., Linde W., Shi Z.* Small deviations of Riemann—Liouville processes in L_q-norms with respect to fractal measures // Proc. Lond. Math. Soc. 2006. Vol. 92, N 1. P. 224–250.

104. *Nazarov A. I., Sheipak I. A.* Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small deviations of Gaussian processes // Bull. Lond. Math. Soc. 2012. Vol. 44, N 1. P. 12–24.

105. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29, № 6. С. 197–229.

106. *Karol' A. I., Nazarov A. I.* Small ball probabilities for smooth Gaussian fields and tensor products of compact operators // Math. Nachr. 2014. Vol. 287, N 5–6. P. 595–609.

107. *Karol' A. I., Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360, N 3. P. 1443–1474.

108. *Розовский Л. В.* О точной асимптотике малых уклонений L_2-норм некоторых гауссовских случайных полей // Теория вероятн. и ее примен. 2018. Т. 63, № 3. С. 468–481. https://doi.org/10.4213/tvp5140

109. *Fill J. A., Torcaso F.* Asymptotic analysis via Mellin transforms for small deviations in L_2-norm of integrated Brownian sheets // Probab. Theory Relat. Fields. 2003. Vol. 130. P. 259–288.

110. *Nazarov A. I.* Log-level comparison principle for small ball probabilities // Stat. Probab. Lett. 2009. Vol. 79, N 4. P. 481–486.

111. *Gao F., Li W. V.* Logarithmic level comparison for small deviation probabilities // J. Theor. Probab. 2007. Vol. 20, N 1. P. 1–23.

112. *Деовельс П., Лифшиц М. А.* Вероятности попадания центрированного пуассоновского процесса в смещенные малые шары // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 278. С. 63–85.

113. *Шмилева Е. Ю.* Вероятности малых шаров центрированного пуассоновского процесса высокой интенсивности // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 298. С. 280–303.

114. *Shmileva E. Yu.* Small ball probabilities for jump Lévy processes from the Wiener domain of attraction // Stat. Probab. Lett. 2006. Vol. 76, N 17. P. 1873–1881.

115. *Фролов А. Н.* Предельные теоремы для вероятностей малых уклонений некоторых итерированных случайных процессов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 396. С. 218–232.

116. *Aurzada F., Lifshits M. A.* On the small deviation problem for some iterated processes // Electron. J. Probab. 2009. Vol. 14, N 68. P. 1992–2010.

117. *Frolov A. N.* Small deviations of iterated processes in the space of trajectories // Cent. Eur. J. Math. 2013. Vol. 11, N 12. P. 2089–2098.

118. *Мартикайнен А. И., Фролов А. Н., Штайнебах Й.* О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов восстановления // Теория вероятн. и ее примен. 2007. Т 52, № 2. С. 366–375.

119. *Aurzada F., Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations of stable processes and entropy of associated random operators // Bernoulli. 2009. Vol. 15, N 4. P. 1305–1334.

120. *Аурзада Ф., Лифшиц М. А.* Малые уклонения сумм коррелированных гауссовских последовательностей // Теор. вероятн. и ее примен. 2016. Т. 61, № 4. С. 626–658.

121. *Dereich S., Lifshits M. A.* Probabilities of randomly centered small balls and quantization in Banach spaces // Ann. Probab. 2005. Vol. 33. P. 1397–1421.

122. *Novak E., Woźniakowski H.* Tractability of Multivariate Problems. Vols I–III. Zürich: European Mathematical Society, 2008; 2010; 2012.

123. *Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H.* Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes // Probab. Math. Statist. 2012. Vol. 32. P. 131–165.

124. *Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H.* Average case tractability of non-homogeneous tensor products problems // J. Complexity. 2012. Vol. 28. P. 539–561.

125. *Lifshits M. A., Tulyakova E. V.* Curse of dimensionality in approximation of random fields // Probab. Math. Stat. 2006. Vol. 26, N 1. P. 97–112.

126. *Сердюкова Н. А.* Зависимость сложности аппроксимации случайных полей от размерности // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 2. С. 256–270.

127. *Хартов А. А.* Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 396. С. 233–256.

128. *Хартов А. А.* Аппроксимация по вероятности тензорных случайных полей возрастающей параметрической размерности // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 412. С. 252–273.

129. *Хартов А. А.* Сложность аппроксимации случайных полей тензорного типа с тяжелым спектром // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Т. 46. Вып. 2. С. 64–67.

130. *Khartov A. A.* Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements // J. Complexity. 2015. Vol. 31, N 6. P. 835–866.

131. *Хартов А. А.* A simplified criterion for quasi-polynomial tractability of approximation of random elements and its applications // J. Complexity. 2016. Vol. 34. P. 30–41.

132. *Высоцкий В. В.* Энергия и количество кластеров в стохастических системах неупругих притягивающихся частиц // Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 50, № 2. С. 241–265.

133. *Захарова В. Ф.* Агрегация в стохастической одномерной модели газа с конечными степенными моментами скоростей частиц // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 158–179.

134. *Куоза Л. В., Лифшиц М. А.* Агрегация в одномерной модели газа с устойчивыми начальными данными // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 311. С. 161–178.

135. *Lifshits M. A., Shi Z.* Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation // Ann. Probab. 2005. Vol. 33. P. 53–81.

136. *Lifshits M. A., Shi Z.* Functional large deviations in Burgers particle systems // Comm. Pure Appl. Math. 2007. Vol. 60, N 1. P. 41–66.

137. *Vysotsky V. V.* Clustering in a stochastic model of one–dimensional gas // Ann. Appl. Probab. 2008. Vol. 18, N 3. P. 1026–1058.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2017 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Запорожец Дмитрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук; zdn@pdmi.ras.ru
Ибрагимов Ильдар Абдуллович — академик РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.; ibr32@pdmi.ras.ru
Лифшиц Михаил Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; m.lifshits@spbu.ru
Назаров Александр Ильич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nazarov@pdmi.ras.ru

To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. II. Random processes and dependent variables

D. N. Zaporozhets[1], *I. A. Ibragimov*[1,2], *M. A. Lifshits*[2], *A. I. Nazarov*[1,2]

[1] St. Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of RAS, nab. reki Fontanki, 27, St. Petersburg, 191023, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zaporozhets D. N., Ibragimov I. A., Lifshits M. A., Nazarov A. I. To the history of Saint-Petersburg school of Probability and Statistics. II. Random processes and dependent variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 367–401. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.303

This is the second article in a series of surveys devoted to the scientific achievements of the Leningrad — Saint-Petersburg school of Probability and Statistics during the period from 1947 to 2017. It is devoted to the works on limit theorems for dependent variables, in particular Markov chains, mixing sequences, the sequences admitting a martingale approximation, and to various topics in the theory of random processes with special emphasis on Gaussian processes, including isoperimetric inequalities, estimates of small deviation inequalities with respect to various norms, and the functional law of the iterated logarithm. We give a short survey and provide a bibliography concerning approximation of the random fields of growing parametric dimension and probabilistic models of gravitational systems of sticky particles including the laws of large numbers and the estimates for large deviation probabilities.

Keywords: limit theorem for dependent variables, Gaussian processes, small deviation probabilities, approximation of processes in growing parametric dimension, functional law of the iterated logarithm, sticky particle systems.

References

1. Markov A. A., “Extension of the law of large numbers to dependent quantities”, *Izvestiia Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ., 2nd Ser.* **15**, 135–156 (1906) [Also Markov A .A., *Selected Works*, 339–361 (AN SSSR, Leningrad, 1951)] [in Russian].

2. Markov A. A., “Investigation of the general case of trials associated into a chain”, *Zapiski Akad. Nauk (St. Petersburg) Fiz.-Matem. Otd., 8th Ser.* **25**(3), 1–33 (1910) [Also Markov A. A., *Selected Works*, 465–507 (AN SSSR, Leningrad, 1951)] [in Russian].

3. Bernstein S. N., *Collected works* **IV** (Nauka Publ., Moscow, 1964) [in Russian].

4. Sapogov N. A., “On singular Markov chains”, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)* **58**, 193–196 (1947) [in Russian].

5. Linnik Yu. V., “On the theory of nonuniform Markov chains”, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **13**, 65–94 (1949) [in Russian].

6. Linnik Yu. V., Sapogov N. A., “Multivariate integral and local laws for inhomogeneous Markov chains”, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **13**, 533–566 (1949) [in Russian].

7. Sapogov N. A., “On multidimensional inhomogeneous Markov chains”, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)* **69**, 133–135 (1949) [in Russian].

8. Dobrushin R. L., “Central limit theorem for nonstationary Markov chains. I, II”, *Theory Probab. Appl.* **1**(1), 65–80 (1956); **1**(4), 329–383 (1956).

9. Statulyavičus V. A., “On a local limit theorem for inhomogeneous Markov chains”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.)* **107**(4), 516–519 (1956) [in Russian].

10. Statulyavičus V. A., “Asymptotic expansion for inhomogeneous Markov chains”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.)* **112**, 206 (1957) [in Russian].

11. Lifshits B. A., “The central limit theorem for sums of random variables connected in a Markov chain”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **219**(4), 797–799 (1974) [in Russian].

12. Lifshits B. A., “On the central limit theorem for Markov chains”, *Theory Probab. Appl.* **23**(2), 279–296 (1979).

13. Rosenblatt M., “A central limit theorem and a strong mixing condition”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42**(1), 43–47 (1956).

14. Ibragimov I. A., “Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **125**(4), 711–714 (1959) [in Russian].

15. Ibragimov I. A., “Spectral functions of certain classes of stationary Gaussian processes”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **137**, 1046–1048 (1961) [in Russian].

16. Ibragimov I. A., “Some limit theorems for stationary processes”, *Theory Probab. Appl.* **7**(4), 349–382 (1962).

17. Ibragimov I. A., “The central limit theorem for sums of functions of independent variables and sums of the form $\sum f(2^k t)$”, *Theory Probab. Appl.* **12**(4), 596–607 (1967).

18. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V., *Independent and Stationary Sequences of Random Variables* (Walters–Noordhoff, Groningen, 1971).

19. Davydov Yu. A., “The strong mixing property for Markov chains with a countable number of states”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **187**(2), 252–254 (1969) [in Russian].

20. Davydov Yu. A., “Mixing conditions for Markov chains”, *Theory Probab. Appl.* **18**(2), 312–328 (1973).

21. Bradley R. C., *Introduction to Strong Mixing Conditions* **1–3** (Kendrick Press, Heber City, 2007).

22. Ibragimov I. A., “A note on the central limit theorem for dependent random variables”, *Theory Probab. Appl.* **20**(1), 135–141 (1975).

23. Davydov Yu. A., “Convergence of distributions generated by stationary stochastic processes”, *Theory Probab. Appl.* **13**(4), 691–696 (1968).

24. Davydov Yu. A., “The invariance principle for stationary processes”, *Theory Probab. Appl.* **15**(3), 487–498 (1970).

25. Gorodetskii V. V., “The invariance principle for stationary random fields with a strong mixing condition”, *Theory Probab. Appl.* **27**(2), 380–385 (1983).

26. Stein C., “A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables”, *Proc. Sixth Berkeley Symp. Prob. Stat.* **2**, 583–602 (Univ. of California Press, 1972).

27. Tikhomirov A. N., “The rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent variables”, *Vestn. Leningrad. Univ. Ser. Matematika. Mehanika. Astronomia* **7**(4), 158–159 (1976) [in Russian].

28. Tikhomirov A. N., “On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables”, *Theory Probab. Appl.* **25**(4), 790–809 (1981).

29. Gorodetskii V. V., “On the convergence rate in the invariance principle for strongly mixing sequences”, *Theory Probab. Appl.* **28**(4), 816–821 (1984).

30. Sapogov N. A., “Law of the iterated logarithm for sums of dependent quantities”, *Leningrad Univ. Uchen. Zap. Ser. Mat. Nauk* **137**(19), 160–179 (1950) [in Russian].

31. Reznik M. Kh., “The law of the iterated logarithm for some classes of stationary processes”, *Theory Probab. Appl.* **13**(4), 606–621 (1968).

32. Ibragimov I. A., “A central limit theorem for a class of dependent random variables”, *Theory Probab. Appl.* **8**(1), 83–89 (1963).

33. Gordin M. I., “On the Central Limit Theorem for stationary processes”, *Soviet Math. Dokl.* **10**(5), 1174–1176 (1969).

34. Gordin M. I., “Central limit theorem without assumption on the variance finiteness”, *Abstr. Intern. Vilnius Conf. Probab. Math. Statist.* **1**, 173–174 (Vilnius, 1973).

35. Hall P., Heyde C. C., *Martingale Limit Theory and Its Application* (Academic Press, 1980).

36. Gordin M. I., Lifshits B. A., “Invariance principle for stationary Markov processes”. In: “Summary of reports presented at sessions of the probability and statistics seminar at the Leningrad section of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences”, *Theory Probab. Appl.* **23**(4), 829–840 (1978).

37. Gordin M. I., Lifshits B. A., “Central limit theorem for Markov stationary processes”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **239**(4), 766–767 (1978).

38. Gordin M. I., Lifshits B. A., “The central limit theorem for Markov processes with normal transition operator and applications to random walks on compact Abelian groups”. In: Borodin A. N., Ibragimov I. A. *Limit theorems for functionals of random walks* (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, AMS, 1995).

39. Gordin M., *CLT for stationary normal Markov chains via generalized coboundaries.* In Ser. *Springer Proc. in Math. and Statistics. Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory* **42** (Springer, Berlin, 2015).

40. Gordin M., Holzmann H., “The central limit theorem for stationary Markov chains under invariant splittings”, *Stoch. Dyn.* **4**(1), 15–30 (2004).

41. Denker M., Gordin M., “Limit theorems for fon Mises statistics of a measure preserving transformation”, *Probab. Theory Rel. Fields* **160**(1–2), 1–40 (2014).

42. Sudakov V. N., “Gauss and Cauchy measures and ε-entropy”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **185**, 51–53 (1969) [in Russian].

43. Sudakov V. N., “Gaussian random processes, and measures of solid angles in Hilbert space”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **197**, 43–45 (1971) [in Russian].

44. Sudakov V. N., “Geometric problems of the theory of infinite-dimensional probability distributions”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **141**, 1–178 (1979).

45. Lifshits M. A., *Gaussian Random Functions* (Kluwer, Dordrecht, 1995).

46. Dudley R. M., “V. N. Sudakov’s work on expected suprema of Gaussian processes”, *High Dimensional Probability VII. Progress in Probability* **71**, 37–43 (Birkhäuser, Springer, 2016).

47. Sudakov V. N., Tsirel’son B. S., “Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures”, *J. Sov. Math.* **9**(1), 9–18 (1978).

48. Tsirel’son B. S., “A natural modification of a random process, and its applications to series of random functions and to Gaussian measures”, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **55**, 35–63 (1976) [in Russian].

49. Tsirel’son B. S., “Supplement to an article on the natural modification”, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **72**, 202–211 (1977) [in Russian].

50. Lifshits M., *Lectures on Gaussian Processes* (Springer, 2012).

51. Kabluchko Z., Zaporozhets D., “Intrinsic volumes of Sobolev balls with applications to Brownian convex hulls”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**, 8873–8899 (2016).

52. Tsirel’son B. S., “A geometric approach to maximum likelihood estimation for infinite-dimensional Gaussian location. II”, *Theory Probab. Appl.* **30**(4), 820–828 (1986).

53. Kabluchko Z., Zaporozhets D., “Expected volumes of Gaussian polytopes, external angles, and multiple order statistics”. Preprint. Available at: https://arxiv.org/abs/1706.08092 (accessed April 11, 2018).

54. Kabluchko Z., Zaporozhets D., “Absorption probabilities for Gaussian polytopes, and regular spherical simplices”. Preprint. Available at: https://arxiv.org/abs/1704.04968 (accessed April 11, 2018).

55. Strassen V., “An invariance principle for the law of the iterated logarithm”, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **3**(3), 211–226 (1964).

56. Grill K., “Exact rate of convergence in Strassen’s law of iterated logarithm”, *J. Theor. Probab.* **5**(1), 197–205 (1992).

57. Talagrand M., “On the rate of clustering in Strassen’s LIL for Brownian motion”, *Proc. Conf. Probability in Banach Spaces VIII*, 339–347 (Birkhäuser, 1993).

58. Deheuvels P., Lifshits M., “Strassen-type functional laws for strong topologies”, *Probab. Theory Rel. Fields* **97**, 151–167 (1993).

59. Deheuvels P., Lifshits M., “Necessary and sufficient condition for the Strassen law of the iterated logarithm in non-uniform topologies”, *Ann. Probab.* **22**, 1838–1856 (1994).

60. Bulinskii A. V., Lifshits M. A., “The best rate of convergence in the Strassen law for random broken lines”, *Moscow Univ. Math. Bull.* **50**(5), 31–36 (1996).

61. Bulinskii A. V., Lifshits M. A., “Estimates for the rate of convergence in the Strassen law for random broken lines”, *J. Math. Sci.* **93**, 287–293 (1999).

62. Berthet Ph., Lifshits M. A., “Some exact rates in the functional law of the iterated logarithm”, *Ann. Inst. H. Poincaré* **38**(6), 811–824 (2002).

63. Gorn N., Lifshits M. A., “Chung law and Csáki function”, *J. Theor. Probab.* **12**, 399–420 (1999).

64. Ibragimov I. A., “On the probability that a Gaussian vector with values in a Hilbert space hits a sphere of small radius”, *J. Sov. Math.* **20**(3), 2164–2174 (1982).

65. Lifshits M. A., “Asymptotic behavior of small ball probabilities”, *Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference, 1998*, 453–468 (VSP/TEV, Vilnius, 1999).

66. Lifshits M. A., “On the lower tail probabilities of some random series”, *Ann. Probab.* **25**, 424–442 (1997).

67. Rozovsky L. V., “Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables”, *J. Math. Sci.* **147**(4), 6935–6945 (2007).

68. Dunker Th., Lifshits M. A., Linde W., “Small deviations of sums of independent variables”, *Proc. Conf. High Dimensional Probability. Ser. Progress in Probability, 1998* **43**, 59–74 (Birkhäuser, 1999).

69. Rozovsky L. V., “On small deviations of series of weighted positive random variables”, *J. Math. Sci.* **176**(2), 224–231 (2011).

70. Rozovsky L. V., “Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables whose density has a power decay at zero”, *J. Math. Sci.* **188**(6), 748–752 (2013).

71. Rozovsky L. V., “Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables with a distribution that slowly varies at zero”, *J. Math. Sci.* **204**(1), 155–164 (2015).

72. Rozovsky L. V., “Small deviations of series of independent nonnegative random variables with smooth weights”, *Theory Probab. Appl.* **58**(1), 121–137 (2014).

73. Rozovsky L. V., “Probabilities of small deviations of a weighted sum of independent random variables with a common distribution that decreases at zero not faster than a power”, *J. Math. Sci.* **214**(4), 540–545 (2014).

74. Rozovsky L. V., “Small deviations of probabilities for weighted sum of independent positive random variables with a common distribution that decreases at zero not faster than a power”, *Theory Probab. Appl.* **60**(1), 142–150 (2016).

75. Rozovsky L. V., “Small deviation probabilities for a sum of independent positive random variables whose general distribution decreases at zero no faster than a power”, *J. Math. Sci.* **229**(6), 767–771 (2018).

76. Rozovsky L. V., “Small deviation probabilities of a weighted sum of independent random variables with a common distribution having a power decrease in zero under minimal moment assumptions”, *Teor. Veroyatn. Primen.* **62**(3), 610–616 (2017) [in Russian].

77. Hong S. Y., Lifshits M. A., Nazarov A. I., “Small deviations in L_2-norm for Gaussian dependent sequences”, *Electronic Comm. Probab.* **21**(41), 1–9 (2016).

78. Lifshits M. A., Simon Th., “Small deviations for fractional stable processes”, *Ann. Inst. H. Poincaré* **41**, 725–752 (2005).

79. Aurzada F., Ibragimov I. A., Lifshits M. A., van Zanten H., “Small deviations of smooth stationary Gaussian processes”, *Theory Probab. Appl.* **53**(4), 697–707 (2009).

80. Lifshits M. A., Nazarov A. I., “L_2-small deviations for weighted stationary processes”, *Mathematika* **64**, iss. 2, 387–405 (2018). https://doi.org/10.1112/S0025579317000572

81. Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu., “Logarithmic L_2-small ball asymptotics for some fractional Gaussian processes”, *Theory Probab. Appl.* **49**(4), 645–658 (2004).

82. Lifshits M. A., Linde W., “Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion”, *Memoirs of Amer. Math. Soc.* **157**(745), 1–87 (2002).

83. Lifshits M. A., Linde W., “Small deviations of weighted fractional processes and average nonlinear approximation”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357**, 2059–2079 (2005).

84. Tsirel’son B. S., “Stationary Gaussian processes with a compactly supported correlation function”, *J. Math. Sci.* **68**(4), 597–603 (1994).

85. Nazarov A. I., “On the sharp constant in the small ball asymptotics of some Gaussian processes under L_2-norm”, *J. Math. Sci.* **117**(3), 4185–4210 (2003).

86. Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu., “Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems”, *Probab. Theory Relat. Fields* **129**(4), 469–494 (2004).

87. Nazarov A. I., “Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems”, *J. Theoret. Probab.* **22**(3), 640–665 (2009).

88. Nazarov A. I., Pusev R. S., “Exact small deviation asymptotics in L_2-norm for some weighted Gaussian processes”, *J. Math. Sci.* **163**(4), 409–429 (2009).

89. Nikitin Ya. Yu., Orsingher E., “Exact small deviation asymptotics for the Slepian and Watson processes”, *J. Math. Sci.* **137**(1), 4555–4560 (2006).

90. Kharinski P. A., Nikitin Ya. Yu., “Sharp small deviation asymptotics in L_2-norm for a class of Gaussian processes”, *J. Math. Sci.* **133**(3), 1328–1332 (2006).

91. Pusev R. S., “Asymptotics of small deviations of the Bogoliubov processes with respect to a quadratic norm”, *Theor. Math. Phys.* **165**(1), 1349–1358 (2010).

92. Pusev R. S., “Asymptotics of small deviations of Matérn processes with respect to a weighted quadratic norm”, *Theory Probab. Appl.* **55**(1), 164–172 (2011).

93. Beghin L., Nikitin Ya. Yu., Orsingher E., “Exact small ball constants for some Gaussian processes under L_2-norm”, *J. Math. Sci.* **128**(1), 2493–2502 (2005).

94. Kirichenko A. A., Nikitin Ya. Yu., “Precise small deviations in L_2 of some Gaussian processes appearing in the regression context”, *Cent. Eur. J. Math.* **12**(11), 1674–1686 (2014).

95. Nazarov A. I., Pusev R. S., “Comparison theorems for the small ball probabilities of the Green Gaussian processes in weighted L_2-norms”, *St. Petersburg Math. J.* **25**(3), 455–466 (2014).

96. Nikitin Ya. Yu., Pusev R. S., “Exact L_2-small deviation asymptotics for some Brownian functionals”, *Theory Probab. Appl.* **57**(1), 60–81 (2013).

97. Nazarov A. I., “On a set of transformations of Gaussian random functions”, *Theory Probab. Appl.* **54**(2), 203–216 (2010).

98. Nazarov A. I., Petrova Yu. P., “The small ball asymptotics in Hilbert norm for the Kac—Kiefer—Wolfowitz processes”, *Theory Probab. Appl.* **60**(3), 460–480 (2016).

99. Nazarov A. I., “Logarithmic L_2-small ball asymptotics with respect to self-similar measure for some Gaussian random processes”, *J. Math. Sci.* **133**(3), 1314–1327 (2006).

100. Rastegaev N. V., “On spectral asymptotics of the Neumann problem for the Sturm—Liouville equation with self-similar weight of generalized Cantor type”, *J. Math. Sci.* **210**(6), 814–821 (2015).

101. Rastegaev N. V., “On the spectrum of the Sturm—Liouville problem with arithmetically self-similar weight”, Preprint of St. Petersburg Math. Soc. 2017-06. Available at: http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2017/17-06.pdf (accessed April 11, 2018) [in Russian].

102. Lifshits M. A., Linde W., Shi Z., “Small deviations of Gaussian random fields in L_q-spaces”, *Electron. J. Probab.* **11**(46), 1204–1223 (2006).

103. Lifshits M. A., Linde W., Shi Z., “Small deviations of Riemann—Liouville processes in L_q-norms with respect to fractal measures”, *Proc. Lond. Math. Soc.* **92**(1), 224–250 (2006).

104. Nazarov A. I., Sheipak I. A., “Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small deviations of Gaussian processes”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **44**(1), 12–24 (2012).

105. Rastegaev N. V., “On the spectral asymptotics of the tensor product of operators with almost regular marginal asymptotics”, *Algebra i Analiz* **29**(6), 197–229 (2017) [in Russian].

106. Karol' A. I., Nazarov A. I., “Small ball probabilities for smooth Gaussian fields and tensor products of compact operators”, *Math. Nachr.* **287**(5–6), 595–609 (2014).

107. Karol' A. I., Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu., “Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360**(3), 1443–1474 (2008).

108. Rozovsky L., “Small ball probabilities for certain Gaussian fields”, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **63** (3), 468–481 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.4213/tvp5140

109. Fill J. A., Torcaso F., “Asymptotic analysis via Mellin transforms for small deviations in L_2-norm of integrated Brownian sheets”, *Probab. Theory Relat. Fields* **130**, 259–288 (2003).

110. Nazarov A. I., “Log-level comparison principle for small ball probabilities”, *Stat. Probab. Lett.* **79**(4), 481–486 (2009).

111. Gao F., Li W. V., “Logarithmic level comparison for small deviation probabilities”, *J. Theor. Probab.* **20**(1), 1–23 (2007).

112. Deheuvels P., Lifshits M. A., “Probabilities of hitting shifted small balls by a centered Poisson process”, *J. Math. Sci.* **118**(6), 5541–5554 (2003).

113. Shmileva E. Yu., “Small ball probabilities for a centered Poisson process of high intensity”, *J. Math. Sci.* **128**(1), 2656–2668 (2005).

114. Shmileva E. Yu., “Small ball probabilities for jump Lévy processes from the Wiener domain of attraction”, *Stat. Probab. Lett.* **76**(17), 1873–1881 (2006).

115. Frolov A. N., “Limit theorems for small deviation probabilities of some iterated stochastic processes”, *J. Math. Sci.* **188**(6), 761–768 (2013).

116. Aurzada F., Lifshits M. A., “On the small deviation problem for some iterated processes”, *Electron. J. Probab.* **14**(68), 1992–2010 (2009).

117. Frolov A. N. “Small deviations of iterated processes in the space of trajectories”, *Cent. Eur. J. Math.* **11**(12), 2089–2098 (2013).

118. Martikainen A. I., Frolov A. N., Steinebach J., “On probabilities of small deviations for compound renewal processes”, *Theory Probab. Appl.* **52**(2), 328–337 (2008).

119. Aurzada F., Lifshits M. A., Linde W., “Small deviations of stable processes and entropy of associated random operators”, *Bernoulli* **15**(4), 1305–1334 (2009).

120. Aurzada F., Lifshits M. A., “Small deviations of sums of correlated stationary Gaussian sequences”, *Theory Probab. Appl.* **61**(4), 540–568 (2017).

121. Dereich S., Lifshits M. A., “Probabilities of randomly centered small balls and quantization in Banach spaces”, *Ann. Probab.* **33**, 1397–1421 (2005).

122. Novak E., Woźniakowski H., *Tractability of Multivariate Problems* **I–III** (European Mathematical Society, Zürich, 2008, 2010, 2012).

123. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H., “Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes”, *Probab. Math. Statist.* **32**, 131–165 (2012).

124. Lifshits M. A., Papageorgiou A., Woźniakowski H., “Average case tractability of non-homogeneous tensor products problems”, *J. Complexity* **28**, 539–561 (2012).

125. Lifshits M. A., Tulyakova E. V., “Curse of dimensionality in approximation of random fields”, *Probab. Math. Stat.* **26**(1), 97–112 (2006).

126. Serdyukova N. A., “Dependence on the dimension for complexity of approximation of random fields”, *Theory Probab. Appl.* **54**(2), 272–284 (2010).

127. Khartov A. A., “Average approximation of tensor product-type random fields of increasing dimension”, *J. Math. Sci.* **188**(6), 769–782 (2013).

128. Khartov A. A., “Approximation in probability of tensor product-type random fields of increasing parametric dimension”, *J. Math. Sci.* **204**(1), 165–179 (2015).

129. Khartov A. A., “Approximation complexity of tensor product-type random fields with heavy spectrum”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **46**(2), 98–101 (2013).

130. Khartov A. A., “Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements”, *J. Complexity* **31**(6), 835–866 (2015).

131. Khartov A. A., “A simplified criterion for quasi-polynomial tractability of approximation of random elements and its applications”, *J. Complexity* **34**, 30–41 (2016).

132. Vysotsky V. V., “On energy and clusters in stochastic systems of sticky gravitating particles”, *Theor. Probab. Appl.* **50**(2), 265–283 (2006).

133. Zakharova V. F., “Aggregation rates in one-dimensional stochastic gas model with finite polynomial moments of particle speeds”, *J. Math. Sci.* **152**(6), 885–896.

134. Kuoza L. V., Lifshits M. A., “Aggregation in one-dimensional gas model with stable initial data”, *J. Math. Sci.* **133**(3), 1298–1307 (2006).

135. Lifshits M. A., Shi Z., “Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation”, *Ann. Probab.* **33**, 53–81 (2005).

136. Lifshits M. A., Shi Z., “Functional large deviations in Burgers particle systems”, *Comm. Pure Appl. Math.* **60**(1), 41–66 (2007).

137. Vysotsky V. V., “Clustering in a stochastic model of one-dimensional gas”, *Ann. Appl. Probab.* **18**(3), 1026–1058 (2008).

Author’s information:

Dmitry N. Zaporozhets — zdn@pdmi.ras.ru
Ildar A. Ibragimov — ibr32@pdmi.ras.ru
Mikhail A. Lifshits — m.lifshits@spbu.ru
Aleksandr I. Nazarov — nazarov@pdmi.ras.ru