МЕХАНИКА

УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями*

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 2. С. 270–280. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209

В статье рассматривается задача об одноосной стабилизации углового положения твердого тела, подверженного воздействию нестационарного возмущающего момента. Возмущающий момент представлен в виде линейной комбинации однородных функций с переменными коэффициентами. Предполагается, что порядок однородности возмущений не превосходит порядка однородности восстанавливающего момента, а переменные коэффициенты в компонентах возмущающего момента обладают нулевыми средними значениями. С использованием метода функций Ляпунова доказана теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости стабилизируемого решения. Найденные условия, гарантирующие решение задачи об одноосной стабилизации углового положения твердого тела, не накладывают ограничений на амплитуды колебаний коэффициентов возмущающего момента. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически.

Ключевые слова: одноосная стабилизация, вращательное движение, нелинейные возмущения, асимптотическая устойчивость.

Введение. Успех в изучении физических и механических задач существенно зависит от качества используемой математической модели. При построении математической модели, описывающей динамику механической системы, мы неизбежно ограничиваемся учетом основных действующих сил и моментов, относя все осталь-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 17-01-00672-а и 19-01-00146-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

ные силы и моменты к категории возмущающих. В некоторых случаях структура возмущающих сил и моментов известна, и их влияние может быть учтено с использованием теории возмущений [1–4]. Методы теории возмущений являются хорошо разработанным средством изучения разнообразных динамических задач. В частности, они широко и успешно используются в задачах динамики искусственных и естественных небесных тел [5–9].

Отметим, что наибольшие трудности возникают при анализе динамики систем с нестационарными возмущениями. В этих случаях эффективным инструментом исследования влияния возмущений на устойчивость является метод усреднения [1, 3, 10–12]. Подходы, основанные на применении метода усреднения, позволяют свести исследование устойчивости нестационарных систем к исследованию устойчивости соответствующих стационарных усредненных систем с вытекающими отсюда существенными упрощениями.

Однако следует заметить, что применение метода усреднения хорошо разработано только для случаев быстро изменяющихся нестационарностей. Для таких случаев метод усреднения широко используется в задачах динамики и управления движением [13–15].

В статьях [16, 17] предложен оригинальный подход к построению функций Ляпунова, с помощью которого найдены новые условия устойчивости для нелинейных нестационарных дифференциальных систем. Результаты работ [16, 17] получили дальнейшее развитие в [18–22].

По сравнению с известными условиями устойчивости, установленными на базе усредненных уравнений, принципиальная новизна результатов работ [16–22] заключается в том, что достаточные условия асимптотической устойчивости найдены без предположения о том, что правые части дифференциальных систем являются быстро изменяющимися функциями времени.

В [23] исследовалась задача об одноосной стабилизации вращательного движения твердого тела. Предполагалось, что на тело действуют линейный момент диссипативных сил, нелинейный однородный восстанавливающий момент и возмущающий момент, представимый в виде линейной комбинации однородных функций с нестационарными коэффициентами, обладающими нулевыми средними значениями. Указанные коэффициенты могут описывать периодические или почти периодические колебания, причем на величины амплитуд этих колебаний никаких ограничений не накладывается. Было доказано, что стабилизация твердого тела имеет место и в случае, когда порядок однородности возмущений совпадает с порядком однородности восстанавливающего момента. При этом, в отличие от известных результатов, не требуется, чтобы возмущения являлись быстро изменяющимися функциями времени.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [23]. Новизна постановки задачи состоит в следующем:

1) по сравнению с [23], рассматривается более широкий класс нестационарных возмущений, для которых неприменимы подходы, использовавшиеся в [23];

2) требуется получить условия, гарантирующие решение задачи одноосной стабилизации в случаях, когда порядок возмущений может не только совпадать с порядком восстанавливающего момента, но и быть меньше его.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг центра масс — точки O — с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Будем считать, что с телом связаны главные центральные оси инерции $Oxyz$. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента $\vec{M}$ имеют вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = \vec{M}, \tag{1}$$

где $J = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$ — тензор инерции тела в осях $Oxyz$.

Пусть заданы два единичных вектора: $\vec{s}$, неподвижный в инерциальном пространстве, и $\vec{r}$, неподвижный в системе координат $Oxyz$. Вектор $\vec{s}$ поворачивается по отношению к системе координат $Oxyz$ с угловой скоростью $-\vec{\omega}$. Поэтому

$$\dot{\vec{s}} = -\vec{\omega} \times \vec{s}. \tag{2}$$

Таким образом, получаем систему, состоящую из динамических уравнений Эйлера (1) и кинематических уравнений Пуассона (2).

Рассмотрим задачу об одноосной стабилизации тела [24]: требуется построить управляющий момент $\vec{M}$ так, чтобы обеспечить для системы (1), (2) существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{s} = \vec{r}. \tag{3}$$

Известно [24, 25], что момент $\vec{M}$ можно выбрать в виде суммы диссипативной составляющей $\vec{M}_d$ и восстанавливающей составляющей $\vec{M}_r$: $\vec{M} = \vec{M}_d + \vec{M}_r$, где

$$\vec{M}_d = -D\vec{\omega}, \quad \vec{M}_r = -a\|\vec{s} - \vec{r}\|^{\mu-1}\, \vec{s} \times \vec{r},$$

$\mu \geq 1$, $a > 0$, D — постоянная симметрическая положительно определенная матрица, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Предположим теперь, что на тело, наряду с управляющим моментом $\vec{M}$, действует возмущающий момент, представимый в следующей форме:

$$\vec{M}_p = \Phi(t)\vec{Q}(\vec{s} - \vec{r}).$$

Здесь матрица $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{3\times k}$ непрерывна и ограничена при $t \geq 0$, а компоненты вектора $\vec{Q}(\vec{u}) \in \mathbb{R}^k$ являются непрерывно дифференцируемыми при $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ однородными порядка $\sigma \geq 1$ функциями.

Таким образом, динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = -D\vec{\omega} - a\|\vec{s} - \vec{r}\|^{\mu-1}\, \vec{s} \times \vec{r} + \Phi(t)\vec{Q}(\vec{s} - \vec{r}). \tag{4}$$

Исследуем условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости положения равновесия (3).

Известные результаты об устойчивости по линейному и нелинейному приближениям (см. [3, 25, 26]) гарантируют, что если $\sigma > \mu$, то положение равновесия (3) системы (2), (4) асимптотически устойчиво.

В настоящей работе рассмотрим случай, когда возмущения имеют нулевые средние значения, т. е.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(\tau)\, d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty. \tag{5}$$

Следует отметить, что возмущения такого рода часто встречаются в задачах небесной механики и динамики космических аппаратов [11, 12, 27, 28].

В статье [23] доказано, что если $\mu > 1$ и

$$\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T}\Phi(\tau)\,d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad T\to+\infty \tag{6}$$

равномерно относительно $t \geq 0$, то асимптотическая устойчивость положения равновесия (3) имеет место и при $\sigma = \mu$.

По сравнению с [23], в данной работе рассмотрим более широкий класс нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями, не требуя, чтобы предельное соотношение (6) выполнялось равномерно по $t \geq 0$.

Кроме того, определим условия, при которых асимптотическая устойчивость сохраняется и в случае, когда порядок однородности возмущений меньше порядка однородности восстанавливающего момента.

2. Достаточные условия асимптотической устойчивости. Будем считать, что нам известна дополнительная информация о предельном соотношении (5).

Предположение 1. *Существует число $\beta \in (0,1]$ такое, что*

$$\frac{1}{T^{\beta}}\int\limits_{0}^{T}\Phi(\tau)\,d\tau \to 0 \quad \textit{при} \quad T\to+\infty.$$

Например, если элементы матрицы $\Phi(t)$ имеют вид

$$\varphi_{ij}(t) = c_{ij}\cos\left(\omega_0 t^{\alpha}\right) + d_{ij}\sin\left(\omega_0 t^{\alpha}\right), \quad i=1,2,3, \quad j=1,\dots,k,$$

где $c_{ij}, d_{ij}, \omega_0, \alpha$ — некоторые постоянные, причем $\omega_0 \neq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, то предположение 1 будет выполнено при любом $\beta \in (1-\alpha, 1]$.

В то же время, при $0 < \alpha < 1$ предельное соотношение (6) выполняется неравномерно относительно $t \geq 0$.

Для получения условий, гарантирующих решение задачи одноосной стабилизации при наличии нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями, воспользуемся подходами, предложенными в работах [16, 17, 29, 30].

Теорема 1. *Пусть $\mu > 1$ и выполнено предположение 1. Тогда для асимптотической устойчивости положения равновесия* (3) *системы* (2), (4) *достаточно, чтобы имело место неравенство*

$$2\sigma \geq \mu + 1 + \beta(\mu - 1). \tag{7}$$

Доказательство. С помощью замены переменных

$$\vec{q} = \vec{s} - \vec{r} - \left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}$$

приведем систему (2), (4) к виду

$$\begin{aligned}
J\dot{\vec{\omega}} \;&+\; \vec{\omega}\times J\vec{\omega} = -D\vec{\omega} - a\left\|\vec{q} + \left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right\|^{\mu-1}\left(\vec{q}\times\vec{r} + \left(\left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right),\\
\dot{\vec{q}} \;&=\; -\vec{\omega}\times\vec{q} - \vec{\omega}\times\left(\left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right) + \left(D^{-1}\left(\vec{\omega}\times J\vec{\omega}\right)\right)\times\vec{r} +\\
&+\; a\left\|\vec{q} + \left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right\|^{\mu-1}\left(D^{-1}\left(\vec{q}\times\vec{r} + \left(\left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right)\right)\times\vec{r} -\\
&-\; \left(D^{-1}\Phi(t)\vec{Q}\left(\vec{q} + \left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right)\right)\times\vec{r}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что положению равновесия (3) системы (2), (4) соответствует нулевое решение системы (8).

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = V_1^{\nu_1+1} + V_2^{\nu_2+1}, \tag{9}$$

где $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 \geq 1$,

$$V_1(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}^\top J\vec{\omega}, \qquad V_2(\vec{q}) = \frac{1}{2}\|\vec{q}\|^2.$$

Функция (9) положительно определена. Дифференцируя ее в силу системы (8), получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq &-b_1\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} + b_2\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+1}\left(\|\vec{\omega}\|^\sigma + \|\vec{\omega}\|^\mu + \|\vec{q}\|^\sigma + \|\vec{q}\|^\mu\right) + \\ &+ a(\nu_2+1)V_2^{\nu_2}\left\|\vec{q} + \left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right\|^{\mu-1}\vec{q}^\top\left(\left(D^{-1}(\vec{q}\times\vec{r})\right)\times\vec{r}\right) - \\ &- (\nu_2+1)V_2^{\nu_2}\vec{q}^\top\left(\left(D^{-1}\Phi(t)\vec{Q}(\vec{q})\right)\times\vec{r}\right) + \\ &+ b_3\|\vec{\omega}\|\|\vec{q}\|^{2\nu_2+1}\left(\|\vec{\omega}\| + \|\vec{\omega}\|^{\mu-1} + \|\vec{\omega}\|^{\sigma-1} + \|\vec{q}\|^{\mu-1} + \|\vec{q}\|^{\sigma-1}\right).\end{aligned}$$

Здесь b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные.

Нетрудно проверить, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\vec{q}^\top\left(\left(D^{-1}\left(\vec{q}\times\vec{r}\right)\right)\times\vec{r}\right) &= -\left(\vec{q}\times\vec{r}\right)^\top D^{-1}\left(\vec{q}\times\vec{r}\right) \leq -b_4\left\|\vec{q}\times\vec{r}\right\|^2 = \\ &= -b_4\left\|\vec{s}\times\vec{r} - \left(\left(D^{-1}J\vec{\omega}\right)\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right\|^2 \leq -\frac{b_4}{2}\left\|\vec{s}\times\vec{r}\right\|^2 + b_5\|\vec{\omega}\|^2,\end{aligned}$$

где $b_4 > 0$, $b_5 > 0$.

Выберем число $\rho \in (0, 1)$. Тогда можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\|\vec{s} - \vec{r}\| < \delta$ выполнено неравенство $\|\vec{s}\times\vec{r}\|^2 \geq \rho\left\|\vec{s} - \vec{r}\right\|^2$.

Как уже было отмечено, при $\sigma > \mu$ положение равновесия (3) системы (2), (4) асимптотически устойчиво. Поэтому далее, не умаляя общности, будем считать, что $\sigma \leq \mu$.

В результате получаем, что существуют положительные числа $b_6, b_7, b_8, \tilde{\delta}$ такие, что

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq &-b_6\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} - b_7\|\vec{q}\|^{2\nu_2+\mu+1} + b_2\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+1}\|\vec{q}\|^\sigma + \\ &+ b_8\|\vec{\omega}\|\|\vec{q}\|^{2\nu_2}\left(\|\vec{\omega}\|\|\vec{q}\| + \|\vec{\omega}\|^\mu + \|\vec{\omega}\|^{\sigma-1}\|\vec{q}\| + \|\vec{q}\|^\sigma\right) - \\ &- (\nu_2+1)V_2^{\nu_2}\vec{q}^\top\left(\left(D^{-1}\Phi(t)\vec{Q}(\vec{q})\right)\times\vec{r}\right)\end{aligned}$$

при $\|\vec{\omega}\| < \tilde{\delta}$, $\|\vec{q}\| < \tilde{\delta}$.

Пусть $\xi = (2\nu_2 + \mu + 1)/(2\nu_1 + 2)$. Используя свойства однородных функций (см. [26]), нетрудно показать, что если

$$\max\left\{\frac{\mu}{2};\ \mu + 1 - \sigma\right\} < \xi < \sigma, \tag{10}$$

а величина $\tilde{\delta}$ достаточно мала, то при $\|\vec{\omega}\| < \tilde{\delta}$, $\|\vec{q}\| < \tilde{\delta}$ справедлива оценка

$$\dot{V} \leq -\frac{b_6}{2}\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} - \frac{b_7}{2}\|\vec{q}\|^{2\nu_2+\mu+1} - (\nu_2+1)V_2^{\nu_2}\vec{q}^\top\left(\left(D^{-1}\Phi(t)\vec{Q}(\vec{q})\right)\times\vec{r}\right).$$

Далее, используя подход, предложенный в [16, 17], строим новую функцию Ляпунова. Пусть

$$\widetilde{V} = V + (\nu_2+1)V_2^{\nu_2}\vec{q}^{\top}\left(\left(D^{-1}\int_0^t \Phi(\tau)d\tau\,\vec{Q}(\vec{q})\right)\times\vec{r}\right). \tag{11}$$

Для функции (11) и ее производной в силу системы (8) в области $\|\vec{\omega}\| < \tilde{\delta}$, $\|\vec{q}\| < \tilde{\delta}$ имеют место оценки

$$c_1\left(\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} + \|\vec{q}\|^{2\nu_2+2}\right) - h_1(t)(t+1)^{\beta}\|\vec{q}\|^{2\nu_2+\sigma+1} \le$$
$$\le \widetilde{V} \le c_2\left(\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} + \|\vec{q}\|^{2\nu_2+2}\right) + h_1(t)(t+1)^{\beta}\|\vec{q}\|^{2\nu_2+\sigma+1}, \tag{12}$$

$$\dot{\widetilde{V}} \le -c_3\left(\|\vec{\omega}\|^{2\nu_1+2} + \|\vec{q}\|^{2\nu_2+\mu+1}\right) +$$
$$+ h_2(t)(t+1)^{\beta}\|\vec{q}\|^{2\nu_2+\sigma}\left(\|\vec{\omega}\|\|\vec{q}\| + \|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{\omega}\|^{\sigma} + \|\vec{q}\|^{\sigma}\right). \tag{13}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, а функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ непрерывны и неотрицательны при $t \ge 0$, причем $h_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $i = 1, 2$.

Пусть выполнено неравенство (7). Тогда параметры ν_1 и ν_2 можно выбрать так, чтобы величина ξ удовлетворяла условию (10) и чтобы имело место соотношение

$$\xi \ge \max\left\{\frac{\mu+1-\sigma+\beta(\mu-1)}{\sigma};\ \frac{\mu+1-\sigma+\beta(\mu-1)}{2};\ \mu-\sigma+\beta(\mu-1)\right\}.$$

При таких значениях ν_1 и ν_2 с использованием оценок (12) и (13) нетрудно доказать (см. [17]) существование положительных чисел $\tilde{t}$, Δ_1, Δ_2 таких, что если для начальных данных решения $(\vec{\omega}^{\top}(t, t_0, \vec{\omega}_0, \vec{q}_0), \vec{q}^{\top}(t, t_0, \vec{\omega}_0, \vec{q}_0))^{\top}$ системы (8) выполнены неравенства

$$t_0 \ge \tilde{t}, \qquad \|\vec{\omega}_0\|^{\frac{\nu_1+1}{\nu_2+1}} + \|\vec{q}_0\| < \Delta_1 t_0^{-\frac{1}{\mu-1}},$$

то при всех $t \ge t_0$ имеем

$$\|\vec{\omega}(t, t_0, \vec{\omega}_0, \vec{q}_0)\|^{\frac{\nu_1+1}{\nu_2+1}} + \|\vec{q}(t, t_0, \vec{\omega}_0, \vec{q}_0)\| < \Delta_2 t^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\mu > 1$ *и выполнено условие* (5)*. Тогда для асимптотической устойчивости положения равновесия* (3) *системы* (2), (4) *достаточно, чтобы имело место неравенство* $\sigma \ge \mu$.

Замечание 1. Следствие 1 обобщает результат работы [23] на более широкий класс нестационарных возмущений. Однако следует отметить, что в [23] установлена равномерная асимптотическая устойчивость положения равновесия. Приведенное в настоящей работе доказательство теоремы 1 не позволяет сделать вывод о том, что асимптотическая устойчивость будет равномерной.

3. Результаты численного моделирования. Рассмотрим твердое тело с моментами инерции $A = 5$, $B = 6$, $C = 4$. Программная ориентация (3) твердого тела такова, что направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 оси z в инерциальной системе координат одинаковы и равны $1/\sqrt{3}$. Рассматривается процесс управления, описываемый системой (2), (4). Выберем матрицу D диссипативного момента в виде $D = \mathrm{diag}\{2, 2, 2\}$. Пусть $a = 1$, $\mu = 3/2$. Возмущающий момент возьмем в виде

$$\vec{M}_p = b\cos(t^{\alpha})\|\vec{s}\times\vec{r}\|^{1/3}\vec{s}\times\vec{r}, \tag{14}$$

где $b = 2$. Заметим, что в данном примере b в два раза больше, чем a.

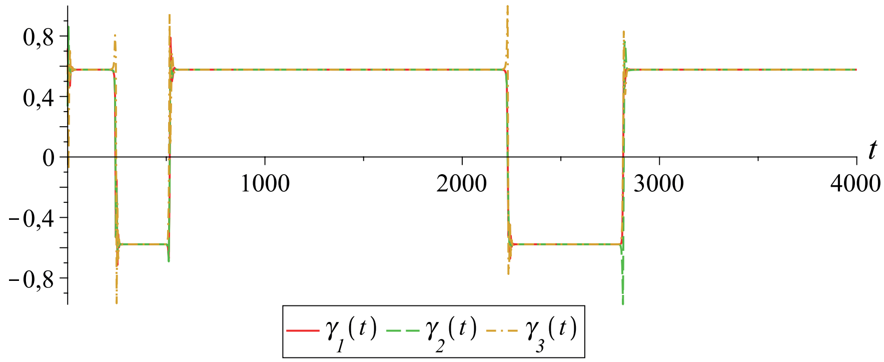

Рис. 1. Направляющие косинусы при $\alpha = 1/3$.

Предположим, что тело в начальный момент времени отклонено от положения равновесия так, что «самолетные» углы крена, тангажа и рыскания, определяющие ориентацию тела в базовой системе координат, равны $\varphi(0) = 0.5$, $\theta(0) = 0.8$, $\psi(0) = 0.6$, что соответствует значениям направляющих косинусов $\gamma_1(0) = 0.717356$, $\gamma_2(0) = 0.334019$, $\gamma_3(0) = 0.611418$, а проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции равны $\omega_x(0) = \omega_y(0) = \omega_z(0) = 1$.

Выбирая значения параметра α, возьмем вначале $\alpha = 1/3$. Следует отметить, что в этом случае неравенство (7) не выполнено. Проведем численное интегрирование с указанными начальными условиями. Результаты, показанные на рис. 1, свидетельствуют о неустойчивости программной ориентации (3).

Выбранный в этом примере возмущающий момент соответствует колебательному процессу, частота которого стремится к нулю с течением времени. В тех интервалах времени, где $\cos(t^\alpha) < 0$, момент (14) оказывает стабилизирующее воздействие и способствует асимптотической устойчивости положения равновесия (3), а в тех интервалах времени, где $\cos(t^\alpha) > 0$, момент (14) оказывает дестабилизирующее воздействие и способствует стабилизации «перевернутого» положения тела. Ввиду того, что в данном примере процесс рассматривается на большом интервале времени, колебания направляющих косинусов в окрестности перехода от программной ориентации (3) к «перевернутому» положению тела, и наоборот, выглядят на рис. 1 в виде скачков. В действительности все три кривые на рис. 1 — гладкие.

Затем возьмем значение $\alpha = 7/9$ и повторим численное интегрирование с теми же самыми начальными условиями. Заметим, что теперь для выбранных значений параметров справедливо неравенство (7). В этом случае возмущающий момент тоже соответствует колебательному процессу, частота которого стремится к нулю с течением времени, но скорость убывания этой частоты меньше, чем в первом примере и поэтому в соответствии с доказанной теоремой 1 такое возмущение не нарушает асимптотической устойчивости программной ориентации (3). Результаты расчетов показаны на рис. 2.

Таким образом, результаты численного моделирования согласуются с выводами, полученными в работе.

Заключение. В работе рассмотрена задача об одноосной стабилизации твердого тела, подверженного воздействию нестационарного возмущающего момента, представленного в виде линейной комбинации однородных функций с переменны-

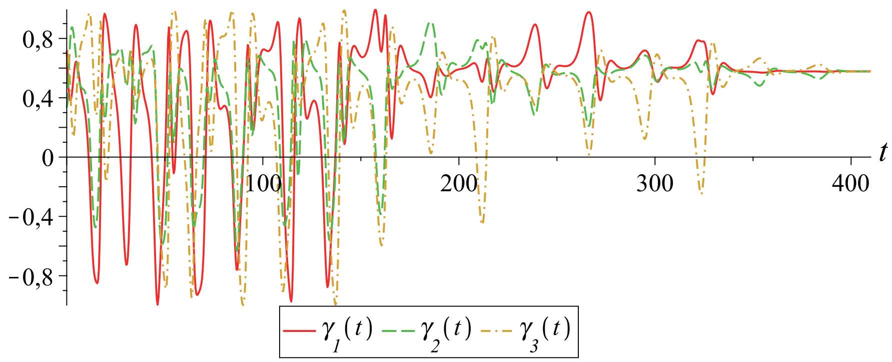

Рис. 2. Направляющие косинусы при $\alpha = 7/9$.

ми коэффициентами. Предполагается, что порядок однородности возмущений не превосходит порядка однородности восстанавливающего момента, а переменные коэффициенты в компонентах возмущающего момента обладают нулевыми средними значениями. В частности, указанные коэффициенты могут быть почти периодическими функциями, что часто встречается в задачах космодинамики.

Доказана теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости стабилизируемого решения. Следует отметить, что найденные условия, гарантирующие решение задачи одноосной стабилизации тела, не накладывают ограничений на амплитуды колебаний коэффициентов возмущающего момента. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически.

Значение полученных результатов может быть продемонстрировано в сравнении данной публикации с недавней публикацией [28], использующей лоренцеву систему управления для стабилизации искусственного спутника Земли. В цитируемой работе исследование на устойчивость также проводилось с помощью метода усреднения. Однако, для обоснования возможности применения данного метода, авторы искусственно вводили малый параметр, что привело к необходимости введения дополнительных предположений, таких как равенство моментов инерции и отсутствие возмущающих моментов.

В нашей работе предложен новый подход к использованию метода усреднения, который может быть применен, в том числе, к задаче, рассмотренной в [28], без упомянутых выше ограничений.

Литература

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

2. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

3. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. Upper Saddle River NJ: Prentice-Hall, 2002. 734 c.

4. *Маркеев А. П.* Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, №2. С. 193–203.

5. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. №5. С. 3–10.

6. *Тихонов А. А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4: многочастотные резонансы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2000. Вып. 1. С. 131–137.

7. *Тихонов А. А.* Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2002. Т. 40, № 2. С. 171–177.

8. *Тихонов А. А.* О ротационном движении экранированного ИСЗ в нецентральном гравитационном поле // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2004. Вып. 3. С. 81–87.

9. *Красильников П. С., Амелин Р. Н.* О вращении Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера // Космич. Исслед. 2016. № 2. С. 135–142.

10. *Guckenheimer, J., and Holmes, P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

11. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.

12. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая школа, 1988. 184 с.

13. *Тихонов А. А.* О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // Космич. Исслед. 2005. Т. 43, № 2. С. 111–125.

14. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // Acta Astronautica. 2012. Vol. 77. P. 48–60.

15. *Kosjakov E. A., Tikhonov A. A.* Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body // Int. J. Non-Linear Mech. 2015. Vol. 73, N 1. P. 51–57. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

16. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 3. С. 295–296.

17. *Александров А. Ю.* К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению // Сибирский мат. журнал. 1997. Т. 38, № 6. С. 1203–1210.

18. *Peuteman J., Aeyels D.* Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time-varying // SIAM J. Control and Optimization. 1999. Vol. 37, N 4. P. 997–1010.

19. *Moreau L., Aeyels D., Peuteman J., Sepulchre R.* A duality principle for homogeneous vectorfields with applications // Systems & Control Letters. 2002. Vol. 47. P. 37–46.

20. *Тихомиров О. Г.* Устойчивость однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. Вып. 3. С. 123–130.

21. *Peuteman J., Aeyels D.* Averaging techniques without requiring a fast time-varying differential equation // Automatica. 2011. Vol. 47. P. 192–200.

22. *Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.* Asymptotic stability conditions and estimates of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems // Circuits, Systems, and Signal Proc. 2016. Vol. 35. P. 3531–3554.

23. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values // Cybernetics and Physics. 2018. Vol. 7, N 1. P. 5–10. http://lib.physcon.ru/doc?id=53fde89856c8

24. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.

25. *Смирнов Е. Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.

26. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. школа, 1973. 272 с.

27. *Антипов К. А., Тихонов А. А.* Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические Исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 512–520.

28. *Giri D. K., Sinha M.* Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // Int. J. Dynam. Control. 2017. Vol. 5. P. 644–652.

29. *Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5–17.

30. *Aleksandrov A., Aleksandrova E.* Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 83, N 4. P. 2427–2434.

Статья поступила в редакцию 30 октября 2018 г.;
после доработки 30 ноября 2018 г.;
рекомендована в печать 20 декабря 2018 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru
Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Monoaxial attitude stabilization of a rigid body in conditions of nonstationary perturbations with zero mean values

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial attitude stabilization of a rigid body in conditions of nonstationary perturbations with zero mean values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 2, pp. 270–280. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209 (In Russian)

The article deals with the problem of monoaxial stabilization of an angular position of a rigid body exposed to a nonstationary perturbing torque. The perturbing torque is represented as a linear combination of homogeneous functions with variable coefficients. It is assumed that the order of homogeneity of the perturbations does not exceed the order of homogeneity of the restoring torque, and the variable coefficients in the components of the disturbing torque have zero mean values. A theorem on sufficient conditions for the asymptotic stability of a programmed motion of the body is proven with the use of the Lyapunov direct method. The found conditions guaranteeing the solution of the problem of monoaxial stabilization of the body do not impose any restrictions on the amplitudes of the oscillations of the disturbance torque coefficients. The results of numerical modeling, illustrating the conclusions obtained in the work, are presented.

Keywords: monoaxial stabilization, attitude motion, nonlinear perturbations, asymptotic stability.

References

1. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations* (Gordon and Breach, New York, 1961).

2. Nayfeh A. H., *Introduction to Perturbation Techniques* (Wiley-Interscience, New York, 1981).

3. Khalil H. K., *Nonlinear Systems* (Upper Saddle River NJ, Prentice-Hall, 2002, 734 p.).

4. Markeyev A. P., "The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point", *J. Appl. Math. Mech.* **75**(2), 132–139 (2011).

5. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernous'ko F. L., "Perturbed motions of a rigid body that a close to regular precession", *Mech. of solids* **21**(5), 1–8 (1986).

6. Tikhonov A. A., "Resonance phenomena in oscillations of a gravity-oriented rigid body. Part 4: Multifrequency resonances", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, issue 1, 131–137 (2000). (In Russian)

7. Tikhonov A. A., "Refinement of the oblique dipole model in the evolution of rotary motion of a charged body in the geomagnetic field", *Cosmic Research* **40**(2), 157–162 (2002). https://doi.org/10.1023/A:1015149420500

8. Tikhonov A. A., "On the rotary motion of a shielded artificial earth satellite in a noncentral gravitational field", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, issue 3, 81–87 (2004). (In Russian)

9. Krasilnikov P. S., Amelin R. N., "On Saturn's rotation relative to a center of mass under the action of the gravitational moments of the Sun and Jupiter", *Cosmic Research* **54**(2), 127–133 (2016).

10. Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983).

11. Grebennikov E. A., *The Averaging Method in Applied Problems* (Nauka Publ., Moscow, 1986). (In Russian)

12. Khapaev M. M., *Averaging in Stability Theory* (Kluwer, Dordrecht, 1993).

13. Tikhonov A. A., "Secular evolution of rotary motion of a charged satellite in a decaying orbit", *Cosmic Research* **43**(2), 107–121 (2005). https://doi.org/10.1007/s10604-005-0023-7

14. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I., "Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation", *Acta Astronautica* **77**, 48–60 (2012).

15. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A., "Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body", *Int. J. Non-Linear Mech.* **73**(1), 51–57 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

16. Aleksandrov A. Yu., "On the asymptotical stability of solutions of nonstationary differential equation systems with homogeneous right hand sides", *Dokl. Akad. Nauk Rossii* **349**(3), 295–296 (1996). (In Russian)

17. Aleksandrov A. Yu., "To the question of stability with respect to nonlinear approximation", *Siberian Math. J.* **38**(6), 1039–1046 (1997).

18. Peuteman J., Aeyels D., "Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time-varying", *SIAM J. Control and Optimization* **37**(4), 997–1010 (1999).

19. Moreau L., Aeyels D., Peuteman J., Sepulchre R., "A duality principle for homogeneous vector fields with applications", *Systems & Control Letters* **47**, 37–46 (2002).

20. Tikhomirov O. G., "Stability of homogeneous nonstationary ordinary differential equations systems", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seria 10. Prikladnaa matematika. Informatika. Processy upravlenia* (3), 123–130 (2007). (In Russian)

21. Peuteman J., Aeyels D., "Averaging techniques without requiring a fast time-varying differential equations", *Automatica* **47**, 192–200 (2011).

22. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A., "Asymptotic stability conditions and estimates of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems", *Circuits, Systems, and Signal Proc.* **35**, 3531–3554 (2016).

23. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A., "Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values", *Cybernetics and Physics* **7**(1), 5–10 (2018). http://lib.physcon.ru/doc?id=53fde89856c8

24. Zubov V. I., *Dynamics of Controlled Systems* (Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1982). (In Russian)

25. Smirnov E. Ya., *Some Problems of the Mathematical Control Theory* (Leningrad University Publ., Leningrad, 1981). (In Russian)

26. Zubov V. I., *Stability of motion* (Vishaya shkola Publ., Moscow, 1973). (In Russian)

27. Antipov K. A., Tikhonov A. A., "Electrodynamic control for spacecraft attitude stability in the geomagnetic field", *Cosmic Research* **52**(6), 472–480 (2014). https://doi.org/10.1134/S001095251406001X

28. Giri D. K., Sinha M., "Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites", *Int. J. Dynam. Control* **5**, 644–652 (2017).

29. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y., "Stability and stabilization of mechanical systems with switching", *Automation and Remote Control* **72**(6), 1143–1154 (2011).

30. Aleksandrov A., Aleksandrova E., "Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces", *Nonlinear Dynamics* **83**(4), 2427–2434 (2016).

Received: October 30, 2018
Revised: November 30, 2018
Accepted: December 20, 2018

Author's information:

Alexander Yu. Aleksandrov — a.u.aleksandrov@spbu.ru
Alexey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru