ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977
MSC 49J15

Оптимизация динамики пучков траекторий с использованием гладких и негладких функционалов. Часть 1

Д. А. Овсянников[1], *М. А. Мизинцева*[1], *М. Ю. Балабанов*[1], *А. П. Дуркин*[2], *Н. С. Едаменко*[1], *Е. Д. Котина*[1], *А. Д. Овсянников*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт ядерных исследований РАН, Российская Федерация, 117312, Москва, пр. 60-летия Октября, 7а

Для цитирования: *Овсянников Д. А., Мизинцева М. А., Балабанов М. Ю., Дуркин А. П., Едаменко Н. С., Котина Е. Д., Овсянников А. Д.* Оптимизация динамики пучков траекторий с использованием гладких и негладких функционалов. Часть 1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 1. С. 73–84. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.107

Проблемам управления и оптимизации в динамических системах посвящено много различных работ. Интерес к этим задачам со временем не уменьшается. Возникают новые задачи при разработке технологических процессов в разнообразных областях науки и техники, в частности при проектировании и создании современной электрофизической аппаратуры. В данной работе рассматриваются проблемы оптимизации и управления пучками траекторий. Задачу совместной оптимизации программного движения и пучка возмущенных движений предлагается решать с помощью комбинирования гладких и негладких функционалов. В ч. 1 описывается математическая постановка задачи, дается представление вариации комбинации функционалов и формулируются условия оптимальности в форме принципа максимума. Использование гладких и негладких функций позволяет определить функционалы, наиболее точно отражающие требования к динамике пучка заряженных частиц в ускорителях. В ч. 2 будут приведены результаты применения предложенной в ч. 1 методики для оптимизации динамики заряженных частиц в ускорителе с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой.

Ключевые слова: управляемая динамическая система, ансамбль траекторий, гладкий функционал, негладкий функционал, принцип максимума, пучок заряженных частиц, ускоритель.

1. Введение. Обе части работы посвящены проблемам управления и оптимизации динамики пучков (ансамблей) траекторий. Задачи управления и оценки состояния динамических систем в условиях неопределенности часто трактуются как задачи управления при неполной информации о начальных данных и внешних возмущениях [1]. Отметим также, что данные проблемы тесно связаны с задачами оптимизации динамики пучков заряженных частиц в ускорителях [2, 3]. При этом математическая теория управления пучками траекторий развивается в основном в двух направлениях: изучаются или гладкие, или негладкие функционалы. Многие исследования посвящены различным аспектам такой теории (см. [4–26]).

В настоящей работе рассматривается проблема совместной оптимизации программного и возмущенных движений с использованием комбинации гладких и негладких функционалов [27–30]. В ч. 1 описывается математическая постановка задачи, дается представление вариации комбинированного функционала и приводятся условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [31]. Функционал состоит из трех частей: программное движение оценивается функционалом Больца, а динамика пучка возмущенных движений — как гладкими, так и негладкими функциями. Гладкий функционал характеризует в среднем динамику всего пучка и его выходные параметры, негладкий функционал — наихудшие выходные параметра пучка и представляет в отдельности минимаксную задачу. Применение комбинации гладких и негладких функций дает возможность, в частности при проектировании, создании и эксплуатации ускорителей заряженных частиц, строить эффективные математические модели оптимизации динамики пучка с использованием функционалов, наиболее точно отражающих требования к разнообразным характеристикам ускоряемого пучка.

В ч. 2 статьи будет рассмотрена проблема оптимизации динамики заряженных частиц в линейном ускорителе с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой [32].

2. Постановка задачи. Введем управляемую динамическую систему, описываемую следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t, x, y, u), \qquad y(0) = y_0 \in M_0, \tag{2}$$

где x_0 и y_0 — начальные условия; $t \in T_0 = [0, T] \subset R^1$ — независимая переменная (как правило, время); $x \in R^n$ и $y \in R^m$ — фазовые векторы размерности n и m соответственно; $u \in R^r$ — r-мерная вектор-функция управления; T — фиксированное значение. Вектор-функции $f(t, x, u)$ и $F(t, x, y, u)$ считаются достаточно гладкими. Множество M_0 — компакт ненулевой меры.

Совместно с системой (1), (2) для плотности распределения частиц [2, 3] $\varrho = \varrho(t) = \varrho(t, y(t))$ на траекториях подсистемы (2) рассмотрим уравнение

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \operatorname{div}_y F(t, x, y, u) \tag{3}$$

с законом распределения плотности $\varrho_0(y_0)$, заданным на начальном множестве M_0:

$$\varrho(0) = \varrho(0, y(0)) = \varrho_0(y_0), \quad y_0 \in M_0.$$

Здесь $\varrho_0(y_0)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция.

Будем считать, что допустимые элементы управления $u = u(t)$, $t \in T_0$, составляют класс D кусочно-непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций со значениями в компактном множестве $U \subset R^r$. Также предположим, что система (1), (2) имеет единственное решение задачи Коши с фиксированным x_0 и произвольным $y_0 \in M_0$ на интервале T_0 для всех допустимых управлений $u \in D$.

Решение подсистемы (1) будем называть программным (или выбранным/рассчитанным) движением, решения подсистемы (2) с начальными условиями $y_0 \in M_0$ и фиксированным программным движением — возмущенными движениями.

Особо отметим, что выбор управляющей функции и, как следствие, программного движения влияет на решения подсистемы (2), которая зависит от них непосредственно и которую, в частности, можно рассматривать как уравнение в отклонениях от программного (расчетного) движения. Поэтому не всегда целесообразно поэтапно искать сначала программное движение, а затем решать задачи оптимизации и стабилизации переходных процессов, вызванных, например, отклонениями исходных данных. Отсюда возникает задача одновременной оптимизации движения программы и ансамбля возмущенных движений [14–16].

Перейдем к математической постановке задачи одновременной оптимизации. На решениях системы (1), (2) и уравнения (3) с заданными начальными условиями и управляющей вектор-функцией $u(t)$ введем следующие функционалы:

$$I_1(u) = \int_0^T \varphi_1(t, x(t))\, dt + g_1(x(T)), \tag{4}$$

$$I_2(u) = \int_0^T \Phi(w_1(t))\, dt + G(w_2(T)), \tag{5}$$

$$I_3(u) = \max_{y_T \in M_{T,u}} \{g_3(x_T, y_T) \cdot \varrho(T, y_T)\}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \int_{M_{t,u}} \varphi_2(t, x(t), y_t)\varrho(t, y_t)\, dt, \\ w_2(T) &= \int_{M_{T,u}} g_2(y_T)\varrho(T, y_T)\, dt. \end{aligned}$$

Здесь множество $M_{t,u}$ — поперечное сечение пучка траекторий подсистемы (2), исходящих из множества M_0 при заданном управлении $u(t)$ и соответствующем программном движении $x(t)$ в момент t, функции Φ, G, φ_1, φ_2, g_1, g_2, g_3 являются неотрицательными непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Введем функционал

$$I(u) = I_1(u) + I_2(u) + I_3(u), \tag{7}$$

который позволяет одновременно оценить динамику программного движения и динамику ансамбля траекторий с учетом плотности распределения частиц для последующей совместной оптимизации.

Задачу минимизации функционала (7) на элементах управления $u \in D$ будем называть задачей совместной оптимизации программного движения и возмущенных движений.

В настоящей работе представлены вариация функционала (7), а также необходимые условия оптимальности, позволяющие построить различные методы направленной оптимизации.

3. Вариация функционала. Предположим, что u и $u + \Delta u$ — допустимые управления. Тогда вариация $\delta I(u, \Delta u)$ функционала (7) имеет вид

$$\delta I(u, \Delta u) = \delta I_1(u, \Delta u) + \delta I_2(u, \Delta u) + \delta I_3(u, \Delta u).$$

Вариации $\delta I_1(u, \Delta u)$ и $\delta I_2(u, \Delta u)$ функционалов (4), (5) известны [14, 16]:

$$\delta I_1(u, \Delta u) = \int_0^T \frac{\partial \varphi_1(t, x(t))}{\partial x} \delta x(t)\, dt + \frac{\partial g_1(x(T))}{\partial x} \delta x(T), \tag{8}$$

$$\delta I_2(u, \Delta u) = \int_0^T \Phi'(w_1(t)) \int_{M_{t,u}} \varrho(t, y_t) \left(\frac{\partial \varphi_2(t, x(t), y_t)}{\partial x} \delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi_2(t, x(t), y_t)}{\partial y} \delta y \right) dy_t\, dt + G'(w_2(T)) \int_{M_{T,u}} \varrho_T \frac{\partial g_2(y_T)}{\partial y} \delta y(T) dy_T. \tag{9}$$

Вариации δx и δy для систем (1) и (2), входящие в равенства (8) и (9), удовлетворяют следующим уравнениям [14, 31]:

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \delta x + \Delta_u f(t, x, u), \tag{10}$$

$$\frac{d\,\delta y}{dt} = \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial x} \delta y + \Delta_u F(t, x, u) \tag{11}$$

и начальным условиям

$$\delta x(0) = 0,\ \delta y(0) = 0.$$

В (10), (11) и далее символ Δ_u обозначает приращение функции при изменении одной только переменной u, например $\Delta_u f = f(t, x, u + \Delta u) - f(t, x, u)$.

Можно показать, что вариация функционала (6), т. е. $\delta I_3(u, \Delta u)$, имеет вид

$$\delta I_3(u, \Delta u) = \max_{y_0 \in R_{T,u}} \left\{ \varrho(T, y_0) \left(\frac{\partial g_3(x(T), y(T))}{\partial x} \delta x(T) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial g_3(x(T), y(T))}{\partial y} \delta y(T) \right) + g_3(x(T), y(T)) \delta \varrho(T, y_0) \right\}. \tag{12}$$

При этом $\delta \varrho$ в соответствии с уравнением (3) для плотности распределения частиц ϱ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d\,\delta\varrho}{dt} = -\varrho\left(\frac{\partial\,\mathrm{div}_y F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\,\mathrm{div}_y F}{\partial y}\delta y + \Delta_u \,\mathrm{div}_y F\right) - \delta\varrho\,\mathrm{div}_y F \tag{13}$$

с начальным условием $\delta\varrho(0) = 0$.

Принимая во внимание соотношение [3, 16]

$$\frac{d\,\mathrm{div}_y\,\delta y}{dt} = \frac{\partial\,\mathrm{div}_y F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\,\mathrm{div}_y F}{\partial y}\delta y + \Delta_u \,\mathrm{div}_y F,$$

можно переписать уравнение (13) следующим образом:

$$\frac{d\,\delta\varrho}{dt} = -\delta\varrho\,\mathrm{div}_y F(t,x,y,u) - \frac{d\,\mathrm{div}_y\,\delta y}{dt}.$$

Интегрируя уравнение для вариации функции плотности распределения с учетом условий $\mathrm{div}_y\,\delta y(0) = 0$ и $\delta\varrho(0) = 0$, получаем равенство

$$\delta\varrho = -\varrho\,\mathrm{div}_y\,\delta y.$$

Введем множество

$$R_{T,u} = \Big\{\overline{y}_0 \,:\, \overline{y}_0 \in M_0, \big(g_3(x(T), y(T, x_0, \overline{y}_0, u))\,\varrho(T, y(T, x_0, \overline{y}_0, u))\big) = \\ = \max_{y_0 \in M_0} \big\{g_3(x(T), y(T, x_0, y_0, u))\,\varrho(T, y(T, x_0, y_0, u))\big\}\Big\}.$$

Теперь вариацию $\delta I_3(u, \Delta u)$ (равенство (12)) функционала (6) можно представить так:

$$\delta I_3(u, \Delta u) = \max_{y_0 \in R_{T,u}} \Big\{\varrho(T, y_0)\left(\frac{\partial g_3(x_T, y(T, y_0))}{\partial x}\delta x(T) + \right. \\ \left. + \frac{\partial g_3(x_T, y(T, y_0))}{\partial y}\delta y(T, y_0) - g_3(x_T, y(T, y_0))\,\mathrm{div}_y\,\delta y(T, y_0)\right)\Big\}.$$

Введем сопряженные функции $\chi(t, y_t)$, $\mu(t, y_t)$, $\psi_m(t, y_t)$, $\mu_m(t, y_t)$, $\nu_m(t, y_t)$, удовлетворяющие вдоль траекторий (1)–(3) следующим линейным интегро-дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\partial f^*}{\partial x}\chi + \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} - \int\limits_{M_{t,u}} \frac{\partial F^*}{\partial x}\mu\,dy_t + \Phi'(w_1)\int\limits_{M_{t,u}} \varrho\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x}\,dy_t,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + E\cdot\mathrm{div}_y F\right)^*\mu + \Phi'(w_1)\,\varrho\,\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y},$$

$$\frac{d\psi_m}{dt} = -\frac{\partial f^*}{\partial x}\psi_m - \frac{\partial F^*}{\partial x}\mu_m - \frac{\partial\,\mathrm{div}_y F^*}{\partial x}\nu_m,$$

$$\frac{d\mu_m}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial y}\mu_m - \frac{\partial\,\mathrm{div}_y F^*}{\partial y}\nu_m,$$

$$\frac{d\nu_m}{dt} = 0$$

и конечным условиям

$$
\begin{aligned}
&\chi(T,\hat{y}_0) = -\frac{\partial g_1(x(T))^*}{\partial x},\\
&\mu(T,y_0) = -G'(w_2)\cdot \varrho_T\frac{\partial g_2(y_T)^*}{\partial y},\\
&\psi_m = -\hat{\varrho}_T\frac{\partial g_3(x(T),y(T,\hat{y}_0))^*}{\partial x},\\
&\mu_m(T,\hat{y}_0) = -\hat{\varrho}_T\frac{\partial g_3(x_T,\hat{y}_T)^*}{\partial y},\\
&\nu_m(T,\hat{y}_0) = g_3(x_T,\hat{y}_T)\hat{\varrho}_T,\\
&\hat{y}_0\in R_{T,u},\quad y_0\in M_0.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$\varrho_T = \varrho(T,y_T),$$

$$\hat{\varrho}_T = \varrho(T,\hat{y}_T),$$

$$G'(w_2) = \frac{dG(w_2)}{dw_2},$$

$$\Phi'(w_1) = \frac{d\Phi(w_1)}{dw_1}.$$

4. Вариация функционала и условие оптимальности. Предположим, что $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ — допустимые управления. Введем обозначение $\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$. Тогда вариация функционала (7) может быть представлена в виде

$$
\begin{aligned}
\delta I(u,\Delta u) = \max_{y_0\in R_{T,u}}\Bigg\{-\int_0^T\Big(\big(\chi+\psi_m\big)^*\cdot\Delta_u f + \int_{M_{t,u}}(\mu^*\cdot\Delta_u F)dy_t + \\
+\mu_m^*\cdot\Delta_u F + \nu_m^*\cdot\Delta_u \operatorname{div}_y F\Big)dt\Bigg\}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Введем функции H_1 и H_2:

$$
\begin{aligned}
H_1(t,x,y,\chi,\psi_m,\mu_m,\nu_m,u) = (\chi+\psi_m)^*\cdot f(t,x,u) + \mu_m^*\cdot F(t,x,y,u) + \\
+\nu_m\cdot\operatorname{div}_y F(t,x,y,u),\\
H_2(t,x,y,\mu,\nu) = \mu^*\cdot F(t,x,y,u).
\end{aligned}
$$

Тогда вариацию (14) функционала (7) можно переписать так:

$$
\delta I(u,\Delta u) = \max_{\hat{y}_0\in R_{T,u}}\Bigg\{-\int_0^T\Big(\Delta_u H_1(t,x(t),y(t,\hat{y}_0),\chi(t,\hat{y}_0),\psi_m(t,\hat{y}_0),\mu_m(t,\hat{y}_0),
$$

$$\nu_m(t,\hat{y}_0),u(t)) + \int\limits_{M_{t,u}} \Delta_u H_2(t,x(t),y_t,\mu(t,y_t),u(t)),dy_t\Big)\,dt\Big\}. \quad (15)$$

Вариации (14) и (15) не являются классическими вариациями функционала (7), так как в общем случае они нелинейны по Δu. Такие вариации используются в математической теории управления для получения условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема. *Предположим, что* $u^0 = u^0(t)$ *есть оптимальное управление, т. е. при этом управлении функционал* (7) *достигает минимума. Тогда для* $t \in T_0 = [0,T]$ *выполняется равенство*

$$\max_{u\in U} \max_{\hat{y}_0\in R_{T,u^0}} H^0(t,\hat{y}_0,u) = \max_{\hat{y}_0\in R_{T,u^0}} H^0(t,\hat{y}_0,u^0(t)),$$

где

$$H^0(t,\hat{y}_0,u) = H_1(t,x^0(t),y^0(t,\hat{y}_0),\chi^0(t,\hat{y}_0),\psi^0_m(t,\hat{y}_0),\mu^0_m(t,\hat{y}_0),\nu^0_m(t,\hat{y}_0),u) +$$

$$+ \int\limits_{M_{t,u^0}} H_2(t,x^0(t),y^0_t,\mu^0(t,y^0_t),u)\,dy^0_t.$$

При этом функции $x^0(t)$, $y^0(t,\hat{y}_0)$, $\chi^0(t,\hat{y}_0)$, $\psi^0_m(t,\hat{y}_0)$, $\mu^0_m(t,\hat{y}_0)$, $\nu^0_m(t,\hat{y}_0)$, $y^0_t,\mu^0(t,y_t)$ *соответствуют оптимальному управлению* $u^0(t)$ *и* $\hat{y}_0 \in R_{T,u^0}$, $y^0_t \in M_{t,u^0}(t,y^0_t)$.

5. Заключение. Вариация (15) функционала (7) и условия оптимальности позволяют строить направленные методы минимизации этого функционала. Отметим, что при совместной оптимизации программного движения и ансамбля возмущенных движений, т. е. при оптимизации функционала (7), динамика пучка траекторий влияет на программное движение. Математически это усматривается в наличии множителя $(\chi + \psi_m)$ при приращении $\Delta_u f$ под знаком первого из интегралов в правой части равенства (14), т. е. влияют не только интегральные характеристики пучка, но и «наихудшие» частицы, доставляющие максимум функционалу (6). При этом учитывается плотность распределения частиц в пучке.

Таким образом, оптимизация комбинации гладких и негладких функционалов представляется эффективной для получения требуемых характеристик выходного пучка траекторий.

В ч. 2 работы будет рассмотрена задача оптимизации динамики заряженных частиц в ускорителе с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой.

Следует также отметить эффективность применения методики оптимизации динамики пучков траекторий при решении разнообразных задач электрофизики и ядерной медицины [33–35].

Литература

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Физматлит, 1977. 394 с.

2. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.

3. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.

4. *Ананьина Т. Ф.* Задача управления по неполным данным // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 13. № 4. С. 612–620.

5. *Пантелеев А., Семенов В. В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 1992. 191 с.

6. *Бортаковский А. С.* Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных непрерывно-дискретных систем // Изв. Рос. акад. наук. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 18–33.

7. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamic optimization for reachability problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. Vol. 108. P. 227–251.

8. *Kotina E. D.* Discrete optimization problem in beam dynamics // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 2006. Vol. 558. N 1. P. 292–294.

9. *Altsybeyev V. V., Ovsyannikov D. A.* Optimization of beam parameters in APF channel // 27th International Linear Accelerator Conference, LINAC 2014. Proceedings. Geneva, 2014. P. 722–725.

10. *Ovsyannikov D. A.* Mathematical methods of optimization of charged partical beams dynamics // Proceeding of the European Partical Accelerator Conference. Barselona, Spain, 1996. Vol. 2. P. 1382–1384.

11. *Bondarev B., Durkin A., Ovsyannikov A.* New mathematical optimization models for RFQ structures // Proceedings of the Particle Accelerator Conference. New York City. 1999. Vol. 4. P. 2808–2810.

12. *Виноградова Т. К., Демьянов В. Ф.* О принципе минимакса в задачах оптимального управления // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 3. С. 512–514.

13. *Демьянов В. Ф., Виноградова Т. К., Никулина В. Н.* и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 324 с.

14. *Овсянников А. Д.* Об одном классе задач оптимизации в электростатическом поле // Докл. АН. 2013. Т. 453. № 4. С. 383–385.

15. *Овсянников А. Д.* Управление программным и возмущенными движениями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 111–124.

16. *Овсянников А. Д.* Управление пучком заряженных частиц с учетом их взаимодействия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 82–92.

17. *Овсянников А. Д.* Математические модели оптимизации динамики пучков. СПб.: Изд-во «ВВМ», 2014. 181 с.

18. *Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V.* On the beam dynamics optimization problem for an alternating-phase focusing linac // Phys. Part. Nuclei Lett. 2016. Vol. 13. N 7. P. 775–779.

19. *Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Vorogushin M. F., Svistunov Yu. A., Durkin A. P.* Beam dynamics optimization: models, methods and applications // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 2006. Vol. 558. N 1. P. 11–19.

20. *Ovsyannikov A. D., Durkin A. P., Ovsyannikov D. A., Svistunov Y. A.* Acceleration of different ion types in single RFQ structure // Problems of Atomic Science and Technology. 2016. Vol. 3(103). P. 54–56.

21. *Овсянников Д. А., Едаменко Н. С.* Моделирование динамики пучков заряженных частиц // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 60–65.

22. *Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V., Durkin A. P., Papkovich V. G.* Application of optimization techniques for RFQ design // Problems of Atomic Science and Technology. 2014. Vol. 3(91). P. 116–119.

23. *Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Chung S.-L.* Optimization of a radial matching section // International Journal of Modern Physics A. 2009. Vol. 24(5). P. 952–958.

24. *Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Chung S.-L.* Optimization of matching section of an accelerator with a spatially uniform quadrupole focusing // Technical Physics. The Russian Journal of Appl. Phys. 2009. Vol. 11. P. 1663–1666.

25. *Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Antropov I., Kozynchenko V.* BDO-RFQ code and optimization models // Proceedings of the International Conference of Physics and Control. 2005. P. 282–288.

26. *Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Ovsyannikov A. D.* Joint optimization of smooth and nonsmooth functionals on beams of trajectories // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Междунар. конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. М.: Изд-во Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Рос. акад. наук, 2018. С. 203–205.

27. *Balabanov M. Yu., Mizintseva M. A., Ovsyannikov D. A.* Beam dynamics optimization in a linear accelerator // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 1. С. 4–13.

28. *Мизинцева М. А.* Об одной задаче минимизации гладких и негладких функционалов //

Вестн. С.-Петерб. гос. ун-та технологии и дизайна. Сер. 1. Естественные и технические науки. 2018. № 2. С. 37–41.

29. *Mizintseva M., Ovsyannikov D.* Minimax problem of simultaneous optimization of smooth and non-smooth functionals // Constructive non-smooth analysis and related topics: Proceedings of the Conference CNSA 2017. IEEE. 2017. P. 218–222.

30. *Mizintseva M., Ovsyannikov D.* On the minimax problem of beam dynamics optimization // 25th Russian Particle Accelerator Conference, RuPAC 2016. Saint Petersburg, 2016. P. 360–362.

31. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

32. *Капчинский И. М.* Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982. 239 с.

33. *Golovkina A., Ovsyannikov D., Olaru S.* Performance optimization of radioactive waste transmutation in accelerator driven system // Cybernetics and Physics. 2018. Vol. 7. N 4. P. 210–215.

34. *Ovsyannikov D., Zavadskiy S.* Pareto-optimal choice of controlled dimension for plasma stabilization system // IFAC-Papers OnLine. Elsevier Science Publishing Company Inc. eISSN: 2405-8963. 2018. Vol. 51. N 32. P. 175–178.

35. *Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V.* Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. Vol. 7. N 4. P. 174–181.

Статья поступила в редакцию 2 марта 2019 г.
Статья принята к печати 13 февраля 2020 г.

Контактная информация:

Овсянников Дмитрий Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Мизинцева Мария Александровна — магистр, ассистент; m.mizintseva@spbu.ru

Балабанов Михаил Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; m.balabanov@spbu.ru

Дуркин Александр Павлович — канд. техн. наук, доц.; durkinap@mail.ru

Едаменко Николай Семенович — канд. физ.-мат. наук, доц.; n.edamenko@spbu.ru

Котина Елена Дмитриевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.kotina@spbu.ru

Овсянников Александр Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.ovsyannikov@spbu.ru

Optimization of dynamics of trajectory bundles using smooth and nonsmooth functionals. Part 1

D. A. Ovsyannikov[1], *M. A. Mizintseva*[1], *M. Yu. Balabanov*[1], *A. P. Durkin*[2], *N. S. Edamenko*[1], *E. D. Kotina*[1], *A. D. Ovsyannikov*[1]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Science, 7a, pr. 60-letia Oktiabria, Moscow, 117312, Russian Federation

For citation: Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Balabanov M. Yu., Durkin A. P., Edamenko N. S., Kotina E. D., Ovsyannikov A. D. Optimization of dynamics of trajectory bundles using smooth and nonsmooth functionals. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 1, pp. 73–84.
https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2020.107 (In Russian)

Many different works are devoted to the problems of control and optimization in dynamic systems. Interest in these tasks does not decrease with time. New challenges arise in the development of technological processes in various fields of science and technology, in particular, in the design and creation of modern electrophysical equipment. In this paper, the problem of optimization and control of trajectory beams is considered. The problem of joint optimization of the program motion and the beam of perturbed motions using a combination of smooth and nonsmooth functionals is investigated. The first part deals with the mathematical formulation of the given representation of the variation of investigated functional and provides optimality conditions in the form of a maximum principle. In the second part, the problem of optimization of dynamics of charged particles in the accelerator with spatially homogeneous quadrupole focusing will be considered. Using a combination of smooth and non-smooth functions allows you to set the functionals that most accurately reflect the requirements for the dynamics of the charged particle beam in accelerators.

Keywords: optimal control, controlled dynamic system, trajectory ensemble, smooth functional, non-smooth functional, maximum principle, charged particle beam, accelerator.

References

1. Kurzhansky A. B. *Upravlenie i nabludenie v usloviah neopredelennosti* [*Control in case of uncertainty*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977, 394 p. (In Russian)

2. Ovsyannikov D. A. *Matematicheskie metody upravlenia puchkami* [*Mathematical methods of beam control*]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1980, 228 p. (In Russian)

3. Ovsyannikov D. A. *Modelirovanie i optimizatsia dinamiki puchkov zarjazhennih chastits* [*Modeling and optimization of charged particle beam dynamics*]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1990, 312 p. (In Russian)

4. Ananyna T. F. Zadacha upravlenia pri nepolnyh dannyh [The problem of control in case of partial data]. *Differential Equations*, 1976, vol. 13, no. 4, pp. 612–620. (In Russian)

5. Panteleev A., Semenov V. V. *Sintez optimalnyh sistem upravlenia pri nepolnoy informatsii* [*Synthesis of optimal control systems with incomplete information*]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ. House, 1992, 191 p. (In Russian)

6. Bortakovsky A. S. Optimalnoe i suboptimalnoe upravlenia puchkami traektoriy determinirovannyh nepreryvno-diskretnyh sistem [Optimal and suboptimal control of beams of trajectories of deterministic continuous-discrete systems]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems*, 2009, no. 1, pp. 18–33. (In Russian)

7. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, vol. 108, pp. 227–251.

8. Kotina E. D. Discrete optimization problem in beam dynamics. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, 2006, vol. 558, no. 1, pp. 292–294.

9. Altsybeyev V. V., Ovsyannikov D. A. Optimization of beam parameters in APF channel. *Proceedings of the 27th International Linear Accelerator Conference, LINAC 2014*. Geneva, 2014, pp. 722–725.

10. Ovsyannikov D. A. Mathematical methods of optimization of charged partical beams dynamics. *Proceedings of the European Partical Accelerator Conference*. Barselona, Spain, 1996, vol. 2, pp. 1382–1384.

11. Bondarev B., Durkin A., Ovsyannikov A. New mathematical optimization models for RFQ structures. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*. New York City, 1999, vol. 4, pp. 2808–2810.

12. Vinogradova T. K., Demyanov V. F. O printsipe minimaksa v zadachah optimalnogo upravlenia [On the minimax principle in optimal control problems]. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1973, vol. 213, no. 3, pp. 512–514. (In Russian)

13. Demyanov V. F., Vinogradova T. K., Nikulina V. N. et al. *Negladkie zadachi teorii optimizatsii i upravlenia* [*Non-Smooth problems of optimization and control theory*]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1982, 324 p. (In Russian)

14. Ovsyannikov A. D. Ob odnom klasse zadach optimizatsii v elektrostaticheskom pole [On a class of optimization problems in electrostatic field]. *Reports of the Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 4, pp. 383–385. (In Russian)

15. Ovsyannikov A. D. Upravlenie programmnym i vozmushennym dvizheniamy [Control of the program and perturbed movements]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2006, iss. 4, pp. 111–124. (In Russian)

16. Ovsyannikov A. D. Upravlenie puchkom zarjazhennih chastist s uchetom ih vzaimodeystvia [Beam control of charged particles taking into account their interaction]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2009, iss. 2, pp. 82–92. (In Russian)

17. Ovsyannikov A. D. *Matematicheskie modeli optimizatsii dinamiki puchkov* [*Mathematical models of beam dynamics optimization*]. Saint Petersburg, Publishing House "BBM", 2014, 181 p. (In Russian)

18. Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V. On the beam dynamics optimization problem for an alternating-phase focusing linac. *Phys. Part. Nuclei Lett.*, 2016, vol. 13, no. 7, pp. 775–779.

19. Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Vorogushin M. F., Svistunov Yu. A., Durkin A. P. Beam dynamics optimization: models, methods and applications. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, 2006, vol. 558, no. 1, pp. 11–19.

20. Ovsyannikov A. D., Durkin A. P., Ovsyannikov D. A., Svistunov Y. A. Acceleration of different ion types in single RFQ structure. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2016, vol. 3(103), pp. 54–56.

21. Ovsyannikov D. A., Edamenko N. S. Modelirovanie dinamiki puchkov zarjazhennih chastits [Modeling of charged particle beam dynamics]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 2, pp. 60–65. (In Russian)

22. Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Altsybeyev V. V., Durkin A. P., Papkovich V. G. Application of optimization techniques for RFQ design. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2014, vol. 3(91), pp. 116–119.

23. Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Chung S.-L. Optimization of a radial matching section. *International Journal of Modern Physics A*, 2009, vol. 24(5), pp. 952–958.

24. Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Chung S.-L. Optimization of matching section of an accelerator with a spatially uniform quadrupole focusing. *Technical Physics. The Russian Journal of Appl. Phys.*, 2009, vol. 11, pp. 1663–1666.

25. Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Antropov I., Kozynchenko V. BDO-RFQ code and optimization models. *Proceedings of the International Conference of Physics and Control*, 2005, pp. 282–288.

26. Ovsyannikov D. A., Mizintseva M. A., Ovsyannikov A. D. Joint optimization of smooth and nonsmooth functionals on beams of trajectories. *Optimal control and differential games. Proceedings of the International Conference dedicated to the 110th anniversary of the birth of Lev Semenovich Pontryagin.* Moscow, Steklov Mathematical Institute of RAS Publ., 2018, pp. 203–205.

27. Balabanov M. Yu., Mizintseva M. A., Ovsyannikov D. A. Beam dynamics optimization in a linear accelerator. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 1, pp. 4–13.

28. Mizintseva M. A. Ob odnoi zadache minimizatsii gladkih i neglagkih functsionalov [On one problem of minimization of smooth and non-smooth functionals]. *Vestnik of Saint Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and Technical Sciences*, 2018, no. 2, pp. 37–41. (In Russian)

29. Mizintseva M., Ovsyannikov D. Minimax problem of simultaneous optimization of smooth and non-smooth functionals. *Constructive non-smooth analysis and related topics. Proceedings of Conference CNSA 2017*. IEEE, 2017, pp. 218–222.

30. Mizintseva M., Ovsyannikov D. On the minimax problem of beam dynamics optimization. *Proceedings of the 25th Russian Particle Accelerator Conference, RuPAC 2016*. Saint Petersburg, 2016, pp. 360–362.

31. Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaia teoria optimalnyh protsessov* [*Mathematical theory of optimal processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 384 p. (In Russian)

32. Kapchinsky I. M. *Teoria lineinyh resonansnyh uskoritelei* [*Theory of linear resonance accelerators*]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 239 p. (In Russian)

33. Golovkina A., Ovsyannikov D., Olaru S. Performance optimization of radioactive waste transmutation in accelerator driven system. *Cybernetics and Physics*, 2018, vol. 7, no. 4, pp. 210–215.

34. Ovsyannikov D., Zavadskiy S. Pareto-optimal choice of controlled dimension for plasma stabilization system. *IFAC-Papers OnLine*. Elsevier Science Publishing Company Inc. eISSN: 2405-8963, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 175–178.

35. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing. *Cybernetics and Physics*, 2018, vol. 7, no. 4, pp. 174–181.

Received: March 02, 2019.
Accepted: February 13, 2020.

Authors' information:

Dmitri A. Ovsyannikov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Maria A. Mizintseva — Magister; m.mizintseva@spbu.ru

Mihail Yu. Balabanov — PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher Worker; m.balabanov@spbu.ru

Alexander P. Durkin — PhD in Technics, Associate Professor; durkinap@mail.ru

Nikolai S. Edamenko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; n.edamenko@spbu.ru

Elena D. Kotina — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; e.kotina@spbu.ru

Alexander D. Ovsyannikov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.ovsyannikov@spbu.ru