УДК 622.691.48 + 550.34.013.4
MSC 00A71

Анализ упрощенных моделей транспортировки газа. Расчет местоположения утечки газа в трубопроводе

Г. И. Курбатова, Е. М. Виноградова, В. А. Клемешев

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Курбатова Г. И., Виноградова Е. М., Клемешев В. А.* Анализ упрощенных моделей транспортировки газа. Расчет местоположения утечки газа в трубопроводе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 239–252.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.205

Предложен подход к упрощенному расчету характеристик установившегося течения газа по трубопроводу. В этом подходе давление рассчитывается по изотермической модели, расчет температуры сводится к решению кубического уравнения. Получена простая аналитическая зависимость координаты места утечки газа от значений давления и расхода на выходе из трубопровода. Представлен результат сравнения расчетов по общей и упрощенной моделям течения газа в трубах. Определены критерий, при выполнении которого допустимо использование упрощенного подхода к расчету характеристик газа, и координаты места утечки. На примере, представляющем практический интерес, продемонстрирована высокая точность расчета по предложенному подходу как давления и температуры в потоке, так и координаты места утечки газа в трубопроводе.

Ключевые слова: течение природного газа, математическая модель, упрощения, аналитический расчет давления, температуры, координаты места утечки.

1. Введение. При транспортировке газа по трубопроводам, при течении газа в скважинах важно обеспечить надежность и безопасность их функционирования, поэтому проблема локализации места утечки газа была и остается актуальной. Методы обнаружения места утечки принято разделять на внешние и внутренние [1–3].

К внешним методам относятся осмотр трубопровода, акустические и оптические методы исследования состояния трубопровода. Они включают также мониторинг прилегающей к трубопроводу почвы и спутниковую съемку трассы прокладки трубопровода. С помощью внешних методов можно оперативно и достаточно точно установить координаты места, где происходит утечка газа, и определить ее размер. Однако эти методы требуют установки и обслуживания дорогостоящего оборудования, что приводит к высоким эксплуатационным расходам. Обзор акустических и оптических методов приведен, например, в работах [1, 4, 5].

Внутренние (модельные) методы базируются на математических моделях транспортировки газа и на созданных на их базе вычислительных комплексах, например [6–14]. К недостатку модельных методов относится невозможность с их помощью определить причину утечки, кроме того, их трудно использовать при наличии более чем одной утечки. Большими достоинствами модельных методов являются их экономичность и простота реализации.

Расчету места утечки газа методом моделирования посвящены многочисленные публикации, начиная с работ 70-х годов XX в. [7] и вплоть до настоящего времени ([12–14] и др.).

Исследование эффективности акустических, оптических и модельных методов обнаружения утечек в газопроводах представлено в недавно вышедшей статье [15]. Ее авторы приходят к выводу, что акустические и оптические методы в сочетании с методом моделирования позволяют не только обнаружить, определить местонахождение и количественно оценить утечку, но и предотвратить ее. Представляет интерес также доклад [4], сделанный в 2019 г. на конференции SPE по газовым и нефтяным технологиям. В нем наряду с обзором работ по обнаружению утечки газа приведен обзор работ по новым тенденциям, связанным с применением контрольно измерительных зондов.

В настоящей работе изучена возможность использования одной упрощенной модели течения газа в трубах для расчета места утечки газа.

2. Модель I. Для моделирования неизотермического установившегося течения природного газа по трубопроводам начиная с 70-х годов XX в. [7] и до настоящего времени [14] успешно используется следующая сравнительно общая одномерная **модель I:**

уравнение неразрывности

$$\rho u S = Q^0, \tag{1}$$

уравнение движения (баланс импульса)

$$\frac{d}{dz}(p + \rho u^2) = -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \tag{2}$$

тепловое уравнение

$$\rho u c_p \frac{dT}{dz} = \rho u T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R} + 2\beta \frac{T^* - T}{R}, \tag{3}$$

уравнение состояния

$$pV = R_g T Z(p, T), \quad V = 1/\rho. \tag{4}$$

В системе уравнений (1)–(4) $Z(p,T)$ — коэффициент сжимаемости газа; V — удельный объем газа; R_g — газовая постоянная, зависящая от состава газовой смеси; z, L — координата вдоль оси газопровода и его длина; ρ, p, T, u — плотность, давление, температура и скорость газа соответственно; R, S — внутренний радиус и площадь поперечного сечения газопровода ($S = \pi R^2$); g — ускорение свободного падения; $\alpha(z)$ — угол между направлением силы тяжести и осью газопровода в z-м сечении; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; β — суммарный коэффициент теплопередачи; c_p — коэффициент удельной теплоемкости газовой смеси при постоянном давлении; Q^0 — массовый расход газа; T^* — температура окружающей среды.

В общем случае величины λ, c_p, β и T^* могут быть функциями координаты z. Суммарный коэффициент теплопередачи β, кроме зависимости от z, является функцией параметров конструкции газопровода, которая также может зависеть от z. Адекватность математической модели (1)–(4) во многом определяется выбором зависимости коэффициента сжимаемости $Z(p,T)$ от давления и температуры в рассматриваемых условиях и выбором величин λ, β, c_p в исследуемом диапазоне изменений давления, температуры и расхода газа. В книге [13] подробно рассмотрены методы расчета λ и β, в работе [16] представлен анализ чувствительности модели I к изменению параметров. Коэффициент удельной теплоемкости c_p газовой смеси при выбранном уравнении состояния (4) может быть рассчитан по известной термодинамической формуле [17, 18]

$$c_p(p,T) = c_p^0(T) - T \int\limits_{p^0}^{p} \left(\partial^2 V/\partial T^2\right)_p dp \tag{5}$$

либо по соответствующим экспериментальным данным. Здесь p^0 — давление, равное атмосферному, $c_p^0(T)$ — зависимость от температуры коэффициента удельной теплоемкости газовой смеси при постоянном давлении p^0 в состоянии совершенного газа.

Система уравнений (1)–(4) дополняется граничным условием на входе в трубопровод:

$$z = 0, \quad p = p_0, \quad T = T_0. \tag{6}$$

Модель I охватывает широкий круг практических задач. Она позволяет учесть неизотермичность процессов, сложную термодинамику газовой смеси, рельеф трассы, условия теплообмена с окружающей средой.

Прямая задача состоит в расчете распределений давления $p(z)$, температуры $T(z)$, плотности $\rho(z)$ и скорости $u(z)$ газа по системе уравнений (1)–(4) при граничном условии (6). Решение системы уравнений (1)–(4) в широком диапазоне изменений p_0, T_0, Q^0, R, L существует, единственно и может быть получено численно, например методом Рунге — Кутты [14].

Расчет координаты утечки газа можно сформулировать как обратную задачу. Ее достоверное решение, как известно, возможно лишь при условии, что соответствующая прямая задача хорошо изучена. Модель и алгоритм решения прямой задачи о течении смеси газов по протяженному морскому газопроводу при высоких давлениях приведены, например, в книге [13], в которой также дано решение задачи идентификации по экспериментальным данным трудноопределимых параметров модели, таких как коэффициент гидравлического сопротивления и суммарный коэффициент теплопередачи. Решение этой задачи позволяет обеспечить адекватность математической модели течения газа в реальных условиях.

3. Уравнение состояния газовой смеси. В задачах обнаружения места утечки газа удобно использовать в качестве независимых термодинамических переменных давление и температуру. Это определяет выбор уравнения состояния в виде формулы (4). Некоторая трудность заключается в том, что в широком диапазоне изменений температуры и давления оказывается непросто задать единый вид зависимости коэффициента сжимаемости от p и T для смесей газов разного состава. Как известно [17, 18], более точными являются аналитические уравнения состояния, такие как уравнения Редлиха — Квонга, Пенга — Робинсона, Бенедикта — Вебба — Рубина. Однако аналитические уравнения состояния являются кубическими относительно удельного объема V и коэффициента сжимаемости $Z(p,T)$, что затрудняет их непосредственное использование в модели I.

При решении реальных задач надежнее всего определять вид зависимости коэффициента сжимаемости $Z(p,T)$ по экспериментальным данным $p - V - T$, полученным для рассматриваемой смеси газов в исследуемом диапазоне изменений температуры и давления.

Предложено немало приближенных зависимостей коэффициента сжимаемости Z от p и T. Для давлений на входе, не превышающих 100 атм, в качестве такой зависимости может быть выбрано уравнение Бертло [7]:

$$Z(p,T) = 1 + 0.07\frac{p}{p_c}\frac{T_c}{T}\left(1 - 6\frac{T_c^2}{T^2}\right), \tag{7}$$

где p_c, T_c — критические давление и температура смеси газов заданного состава. Коэффициент сжимаемости $Z(p,T)$ при сверхвысоких давлениях рассчитан, например, в работе [19].

4. Упрощенная модель. Приведем систему уравнений (1)–(4), (7) с граничным условием (6) к безразмерному виду, определив безразмерные величины равенствами

$$\begin{gathered}\tilde{z} = \frac{z}{l_x}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_x}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_x}, \quad \rho_x = \frac{p_x}{R_g T_x Z(p_x, T_x)}, \\ u_x = \frac{Q^0}{\rho_x S}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_x}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_x}, \quad \tilde{T^*} = \frac{T^*}{T_x}.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь l_x, T_x, p_x — независимые характерные величины, принятые равными: $l_x = L$, $T_x = T_0$, $p_x = p_0$. Полученная безразмерная система уравнений (1)–(4), (7) известным образом приводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных $d\tilde{p}/d\tilde{z}$, $d\tilde{T}/d\tilde{z}$, и к алгебраическим уравнениям относительно $\tilde{\rho}$ и $\tilde{u}$. Опустим волнистые линии у безразмерных величин везде, где это не приводит к двусмысленности.

Ограничимся рассмотрением горизонтальных трасс и теплоизолированных ($\beta = 0$) трубопроводов. Выясним, при каких условиях расчет по модели I близок к расчету по описанной далее упрощенной модели II.

Запишем безразмерную модель I при отсутствии утечки газа для горизонтальной трассы в условиях идеальной теплоизоляции ($\beta = 0$) трубопровода:

$$\rho u = 1, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dz}(p + c_0 \rho u^2) = -c_1 \rho u^2, \tag{10}$$

$$\frac{dT}{dz} = c_2 T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p \frac{dp}{dz} + c_3 u^2, \tag{11}$$

$$p = \rho T Z(p,T)/Z_x, \tag{12}$$

$$Z(p,T) = 1 + a\frac{p}{T} - b\frac{p}{T^3}, \tag{13}$$

$$a = 0.07\frac{p_x}{p_c}\frac{T_c}{T_x}, \quad b = 0.42\frac{p_x}{p_c}\left(\frac{T_c}{T_x}\right)^3, \quad Z_x = 1 + a - b, \tag{14}$$

$$z = 0: \ p = 1, \ T = 1. \tag{15}$$

Безразмерные комплексы $c_0, \ldots, c_3$ для постоянных величин λ и c_p равны

$$\begin{gathered}c_0 = \left(\frac{Q^0}{S}\right)^2 \frac{R_g T_x Z_x}{p_x^2}, \quad c_1 = c_0 \frac{\lambda L}{4R}, \\ c_2 = \frac{R_g}{c_p} Z_x, \quad c_3 = c_1 \cdot c_2.\end{gathered} \tag{16}$$

В системе уравнений (9)–(13) и в граничном условии (15) все величины безразмерные.

Покажем, что из системы уравнений (9)–(12) следует изотермичность процессов при выполнении следующих двух условий:

$$p \gg c_0 \rho u^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -c_1 \rho u^2, \tag{17}$$

$$Z(p,T) = \mathrm{const} = Z_*. \tag{18}$$

Действительно, при условии (18) первое слагаемое в правой части теплового уравнения (11) равно

$$c_2 T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p \frac{dp}{dz} = \frac{c_2}{\rho}\frac{dp}{dz}. \tag{19}$$

Второе слагаемое в правой части теплового уравнения (11) с учетом упрощенного уравнения движения (17) и равенства $c_3/c_1 = c_2$ (16) преобразуется к виду

$$c_3 u^2 = \left(-\frac{c_3}{c_1 \rho}\right)\left(-c_1 \rho u^2\right) = -\frac{c_2}{\rho}\frac{dp}{dz}. \tag{20}$$

Из равенств (19), (20) следует равенство нулю правой части теплового уравнения (11), что доказывает изотермичность процессов:

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad \longrightarrow \quad T = \mathrm{const} = T\Big|_{z=0} = 1.$$

При выполнении условий (17), (18) система уравнений (9)–(12) эквивалентна следующей безразмерной изотермической **модели II:**

$$\begin{cases} \rho u = 1, \\ \dfrac{dp}{dz} = -c_1 \rho u^2, \\ p = \rho \dfrac{Z_*}{Z_x}, \\ p\Big|_{z=0} = 1, \quad T = \mathrm{const} = 1. \end{cases}$$

Правая часть уравнения движения в модели II преобразуется с учетом уравнения неразрывности и уравнения состояния следующим образом:

$$-c_1 \rho u^2 = -\frac{c_1}{\rho} = -\frac{c_1 Z_*}{Z_x}\frac{1}{p},$$

что позволяет записать уравнение движения в виде

$$\frac{dp}{dz} = -c_4 \frac{1}{p}, \tag{21}$$

$$c_4 = c^0 Z_*, \quad c^0 = \left(\frac{Q^0}{S}\right)^2 \frac{\lambda L}{4R}\frac{R_g T_x}{p_x^2}.$$

Дифференциальное уравнение (21) легко интегрируется. При граничном условии модели II это приводит к следующей зависимости безразмерного давления от безразмерной координаты z:

$$p(z) = \left(1 - 2\, c_4 z\right)^{1/2}. \tag{22}$$

Проведенное исследование показало, что величину эффективного постоянного коэффициента сжимаемости Z_* целесообразно определять из требования равенства давления $p\Big|_{z=1}$, рассчитанного по формуле (22) при $z = 1$, и давления p_1, равного

$$p_1 = p_L/p_x,$$

здесь p_L — размерное экспериментальное давление на выходе трубопровода в штатном режиме транспортировки (без утечки газа). Найденная таким образом величина Z_* равна

$$Z_* = \frac{1 - p_1^2}{2\,c^0}. \tag{23}$$

Расчеты проводились для разных наборов параметров модели I. В качестве примера приведены результаты расчета для следующего тестового набора параметров:

$$\begin{gathered} R = 0.5 \text{ м}, \quad Q^0 = 450 \text{ кг/с}, \quad L = 50 \text{ км}, \quad \lambda = 0.0087, \\ p_0 = 75 \text{ атм}, \quad T_0 = 313.15 \text{ К}, \quad R_g = 493.5 \text{ Дж/(кг·К)}, \\ T_c = 193.7 \text{ К}, \quad p_c = 45.4 \text{ атм}. \end{gathered} \tag{24}$$

Коэффициент удельной теплоемкости c_p газовой смеси рассчитывался по формуле (5), после чего определялось его среднее значение в исследуемом диапазоне изменений p и T [14]. Величины параметров R_g, T_c, p_c в наборе (24) соответствуют смеси газов, содержащей 95.6 % метана, состав смеси и характеристики ее компонент приведены в книге [13]. (В наборе (24) представлены округленные значения параметров, кроме того, давление указано в атмосферах, длина трубопровода — в километрах. В расчетах эти параметры задавались в системе СИ и с большой точностью.)

Система уравнений общей модели I решалась численно методом Рунге—Кутты 3-го порядка точности. Размерное давление, рассчитанное по модели I, обозначено P_{I}, атм, а по изотермической модели II (формула (22)) — P_{A} ($P_{\text{A}} = p(z)\,p_x$). При расчете эффективного постоянного коэффициента сжимаемости Z_* (23) из-за отсутствия экспериментальных данных в качестве экспериментального давления p_L использовалось размерное давление $P_{\text{I}}\Big|_L$ на выходе из трубопровода, найденное по модели I.

В табл. 1 для набора параметров (24) приведены результаты расчета давлений P_{I} и P_{A}, а также абсолютные величины их разности.

Таблица 1. **Распределение давления в штатном режиме**

z, км	P_{I}, атм	P_{A}, атм	$\lvert P_{\text{I}} - P_{\text{A}}\rvert$, атм
10	72.3513	72.3527	0.0014
20	69.6027	69.6047	0.0020
30	66.7418	66.7437	0.0019
40	63.7532	63.7544	0.0012
45	62.2053	62.2060	0.0007
50	60.6180	60.6180	0.0000

Вывод 1. Данные табл. 1 свидетельствуют о правомерности использования упрощенной модели II для расчета давления в задачах, в которых трасса прокладки газопровода горизонтальная, $\beta = 0$, выполняется условие (17) и эффективный коэффициент сжимаемости определен равенством (23).

5. Распределение давления при наличии утечки газа. Пусть в сечении трубопровода с размерной координатой z_a происходит стационарная утечка газа. При отсутствии утечки в установившемся режиме на выходе из трубопровода расход равен расходу Q^0 на входе.

При возникновении утечки газа спустя некоторое время устанавливается новый стационарный режим, в котором на выходе из трубопровода давление и расход принимают новые значения P_L, Q_L ($P_L > P_L^0$, $Q_L < Q^0$), при этом выполняются равенства

$$Q = \begin{cases} Q^0, & 0 \leqslant z \leqslant z_a, \\ Q_L, & z_a < z \leqslant L. \end{cases}$$

Разность $(Q^0 - Q_L)$ определяет интенсивность δQ утечки газа. Величины P_L, P_L^0, Q_L, Q^0 размерные.

Найдем распределение давления по упрощенной модели II при заданной утечке газа. Пусть безразмерная координата l_a места утечки газа *известна*. Трубопровод разбивается на два участка:

первый участок: $z \in [0, l_a]$, *второй участок:* $z \in [l_a, 1]$.

На первом участке давление $p(z)$ рассчитывается по формуле (22) модели II, в частности давление в сечении с безразмерной координатой l_a равно

$$p_a = p(l_a) = (1 - 2\,c_4 l_a)^{1/2}.$$

На втором участке давление $p(z)$ рассчитывается по модели II при изменившейся величине расхода газа $Q = Q_L$ при граничном условии

$$p\Big|_{z=l_a} = p_a.$$

Интегрирование уравнения движения модели II на втором участке приводит к следующей зависимости $p(z)$:

$$p(z) = \big(1 - 2l_a(c_4 - c_4^a) - 2c_4^a z\big)^{1/2}, \quad z \in [l_a, 1], \tag{25}$$

здесь безразмерный коэффициент c_4^a равен

$$c_4^a = c^a Z_*, \quad c^a = \left(\frac{Q_L}{S}\right)^2 \frac{\lambda L}{4R} \frac{R_g T_x}{p_x^2}.$$

В табл. 2 приведены результаты расчета давления на втором участке по модели I и по упрощенной изотермической модели II для набора параметров (24) при утечке газа средней интенсивности, равной $\delta Q = 45$ кг/с, расположенной в сечении с безразмерной координатой $l_a = 0.2$. (В табл. 2 приняты те же обозначения, что и в табл. 1.)

Таблица 2. **Распределение давления на втором участке при утечке газа в сечении $z_a = 10$ км**

z, км	P_{I}, атм	P_{A}, атм	$\lvert P_{\mathrm{I}} - P_{\mathrm{A}}\rvert$, атм
15	71.2510	71.2525	0.0015
25	68.9982	69.0000	0.0018
35	66.6700	66.6706	0.0006
45	64.2574	64.2573	0.0001
50	63.0167	63.0159	0.0008

Данные табл. 2 подтверждают вывод 1 и при наличии в трубопроводе утечки газа средней интенсивности.

6. Расчет координаты места утечки. Из аналитической формулы (25) для распределения давления на втором участке следует простая зависимость безразмерной координаты l_a^A места утечки газа от давления p_L и расхода Q_L на выходе из трубопровода:

$$l_a^A = \frac{1 - p_1^2 - 2c_4^a}{2(c_4 - c_4^a)}, \quad p_1 = p_L/p_x. \tag{26}$$

Из-за отсутствия экспериментальных данных в качестве экспериментального давления p_L в расчетах задавалось размерное давление на выходе, найденное по модели I при заданной утечке газа. В табл. 3 приведены результаты расчета координаты l_a^A места утечки газа по формуле (26) для набора параметров (24) при интенсивности утечки $\delta Q = 45$ кг/с.

Таблица 3. **Расчет координаты места утечки газа**

l_a	l_a^A	$\delta l_a = \lvert l_a - l_a^A \rvert$	δz_a, м
0.2	0.199723	0.000277	13.85
0.4	0.399774	0.000226	11.30
0.6	0.599834	0.000165	8.28
0.8	0.799908	0.000092	4.59
0.9	0.899951	0.000048	2.42

В табл. 3 l_a — истинное значение безразмерной координаты места утечки, $\delta z_a = |l_a - l_a^A| \cdot L$ — модуль абсолютной погрешности расчета размерной координаты места утечки (в метрах).

Вывод 2. Проведенное численное исследование, часть из которого представлена в табл. 3, свидетельствует о допустимости использования упрощенной изотермической модели II и следующей из нее простой формулы (26) для расчета координаты места утечки газа средней интенсивности при выполнении условий $c_0 \ll 1$, $\beta = 0$, $Z = Z_*$, трасса горизонтальная.

7. Расчет распределения температуры. Как следует из расчетов по общей модели I, при наборе параметров (24) для горизонтального теплоизолированного ($\beta = 0$) трубопровода температура газа изменяется примерно на 5 °C, т. е. не является постоянной. Давление, рассчитанное по упрощенной изотермической модели II, как показано выше, близко к полученному по неизотермической модели I. Это свидетельствует о том, что небольшие изменения температуры практически не сказываются на поведении давления в потоке газа.

Для расчета распределения температуры $T(z)$ предлагается следующий подход: распределение $T(z)$ определяется по приведенному ниже уравнению сохранения полной энергии, в котором давление считается известным из расчета по упрощенной изотермической модели II, в качестве уравнения состояния используется уравнение состояния (12) с коэффициентом сжимаемости Бертло (13).

Как известно [7, 13], в общей модели I вместо теплового уравнения (3) можно использовать уравнение сохранения полной энергии, которое для одномерного установившегося течения газа (т. е. в рамках модели I) записывается в размерном виде следующим образом:

$$\frac{d}{dz}\left(\rho u S \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\right) = -\frac{2\beta(T - T^*)}{R} + u\rho g \cos\alpha(z), \tag{27}$$

$$e = h - \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2},$$

здесь e — удельная полная энергия, h — удельная энтальпия газа.

Для горизонтальной трассы при условии теплоизоляции ($\beta = 0$) уравнение энергии (27) имеет интеграл:

$$e(z) + \frac{p(z)}{\rho(z)} = \text{const} = \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{z=0},$$

который в терминах удельной энтальпии h можно записать в виде

$$h(z) + \frac{u^2(z)}{2} = \text{const} = \left(h + \frac{u^2}{2}\right)_{z=0}. \tag{28}$$

Зависимость энтальпии h от размерных величин давления p и температуры T может быть представлена следующим образом [7, 13]:

$$h = c_p^0(T - T^0) + J(p,T), \tag{29}$$

$$J(p,T) = \int\limits_{p^0}^{p} \left(\frac{1}{\rho} - T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p\right) dp.$$

Здесь T^0, p^0 — температура и давление, при которых рассматриваемая газовая смесь ведет себя как совершенный газ. Зависимость теплоемкости газовой смеси от температуры в состоянии совершенного газа можно считать линейной в исследуемом диапазоне изменения температуры.

Перейдем к безразмерной форме, используя введенные выше (8) характерные величины $l_x = L$, $T_x = T_0$, $p_x = p_0$. Кроме того, положим, что

$$\frac{T^0}{T_x} = T_b, \quad \frac{p^0}{p_x} = p_b.$$

Сохраним для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных. С учетом уравнения состояния (12) запишем интеграл J в (29) в терминах безразмерных величин p, T, p_b, J_b:

$$J = \frac{p_x}{\rho_x Z_x} J_b, \quad J_b = \int\limits_{p_b}^{p} \left(\frac{TZ(p,T)}{p} - T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{TZ(p,T)}{p}\right)_p\right) dp.$$

Коэффициент $\frac{p_x}{\rho_x Z_x}$, как нетрудно видеть, равен $\frac{p_x}{\rho_x Z_x} = R_g T_x$. Интеграл уравнения энергии (28) в безразмерной форме примет вид

$$T - T_b + c_5 J_b + c_6 u^2 = c_7, \tag{30}$$

безразмерные комплексы c_5–c_7 равны

$$c_5 = \frac{R_g}{c_p^0}, \quad c_6 = \frac{u_x^2}{2\, c_p^0\, T_x}, \quad c_7 = 1 - T_b + c_5 J_b\Big|_{p=1,\, T=1} + c_6.$$

Интеграл J_b для коэффициента сжимаемости Бертло (13) легко рассчитывается аналитически:

$$J_b = (p - p_b)\left(a - \frac{3b}{T^2}\right). \tag{31}$$

Безразмерные величины a и b в (31) определены равенствами (14). Оценим допустимость пренебрежения кинетической энергией по сравнению с энтальпией в интеграле уравнения энергии. Как следует из (30), вклад кинетической энергии оценивается величиной безразмерного комплекса c_6, который выражается через введенный выше комплекс c_0 (16) по формуле

$$c_6 = c_0 \frac{R_g}{2\, c_p^0} Z_x,$$

из которой следует, что $c_6 < c_0$.

Вывод 3. Малость безразмерного комплекса c_0 (16) позволяет не только пренебречь силами инерции по сравнению с давлением в уравнении движения (10), но и свидетельствует о малости удельной кинетической энергии по сравнению с удельной энтальпией в интеграле (28) сохранения полной энергии.

Малость комплекса c_0 характерна для многих задач транспортировки газа. Например, для набора параметров (24) безразмерные комплексы c_0 и c_6 равны: $c_0 = 8 \cdot 10^{-4}$, $c_6 = 8 \cdot 10^{-5}$. Это позволяет записать интеграл уравнения энергии (30) с учетом выражения для J_b (31) следующим образом:

$$T(z) - T_b + c_5(p(z) - p_b)\left(a - \frac{3b}{T^2(z)}\right) = c_8, \tag{32}$$
$$c_5 = \frac{R_g}{c_p^0}, \quad c_8 = 1 - T_b + c_5(1 - p_b)(a - 3b).$$

В принятом подходе распределение давления $p = p(z)$ в (32) рассчитывается по формуле (22) при отсутствии утечки газа и по формуле (25) — на втором участке при наличии утечки газа в сечении с безразмерной координатой l_a. Уравнение (32) является кубическим относительно безразмерной температуры. При отсутствии утечки газа его можно представить в виде ($z \in [0, 1]$)

$$T^3(z) + D(z)T^2(z) - B(z) = 0, \tag{33}$$
$$D(z) = c_5 a\big(p(z) - p_b\big) - T_b - c_8,$$
$$B(z) = 3c_5 b\big(p(z) - p_b\big).$$

При наличии утечки газа в сечении с безразмерной координатой l_a температура на первом участке рассчитывается по уравнению (33), в котором давление $p(z)$ определено равенством (22), на втором участке — по тому же уравнению (33), но при давлении $p(z)$, найденному по равенству (25).

В табл. 4 для набора параметров (24) при температуре $T^0 = 280$ K и давлении $p^0 = 1$ атм приведены данные расчета температуры (в градусах Цельсия) по общей модели I (T_{I}) и по уравнению (33) (T_{A}) при отсутствии утечки газа, в табл. 5 — распределение температуры при том же наборе параметров, в тех же обозначениях, что использованы в табл. 4, на втором участке трубопровода при утечке газа интенсивностью $\delta Q = 45$ кг/с в сечении с безразмерной координатой $l_a = 0.2$.

Вывод 4. Данные табл. 4 и 5 свидетельствуют о том, что в принятых условиях предложенный подход позволяет с высокой точностью рассчитать распределение

Таблица 4. **Распределение температуры в трубопроводе (без утечки газа)**

z, км	T_{I}, °C	T_{A}, °C	$\delta T = \lvert T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{A}} \rvert$, °C
10	39.1425	39.1462	0.0037
20	38.2467	38.2496	0.0029
30	37.3076	37.3046	0.0030
40	36.3192	36.3042	0.0150
50	35.2739	35.2400	0.0339

Таблица 5. **Распределение температуры на втором участке при заданной утечке газа ($l_a = 0.2$, $z_a = 10$ км)**

z, км	T_{I}, °C	T_{A}, °C	$\delta T = \lvert T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{A}} \rvert$, °C
15	38.7848	38.7886	0.0038
25	38.0493	38.0508	0.0015
35	37.2846	37.2803	0.0043
45	36.4876	36.4735	0.0141
50	36.0758	36.0550	0.0208

температуры в трубопроводе как в штатном режиме транспортировки, так и при наличии утечки газа по кубическому уравнению (33), в котором давление найдено по упрощенной изотермической модели II.

8. Заключение. Предложен упрощенный подход к расчету характеристик установившегося потока газа в теплоизолированном трубопроводе. В этом подходе давление определяется по изотермической модели, расчет температуры сводится к решению кубического уравнения, расчет координаты места утечки газа по известным значениям давления и расхода газа на выходе из трубопровода проводится по простой аналитической формуле. Определены условия, при выполнении которых допустимо использование описанного подхода к расчету характеристик газа и координаты места утечки.

На примере, представляющем практический интерес, продемонстрирована высокая точность расчета координаты места утечки газа и распределений давления и температуры как в штатном режиме транспортировки газа, так и при наличии утечки в газопроводе.

Рассмотренный подход имеет ограничения, характерные для всех модельных методов: он позволяет рассчитать координаты места утечки газа лишь спустя некоторое время после ее возникновения и не дает возможности определить причину возникновения утечки.

При выполнении необходимых условий этот подход позволяет легко рассчитать координаты места утечки газа с точностью до нескольких метров при давлениях $p < 10$ МПа в широком диапазоне изменений размера утечки и ее местоположения. Он обобщается и на сверхвысокие давления, порядка 25 МПа.

Как показали исследования, подобный подход, основанный на расщеплении общей модели I и на упрощенном расчете давления, оказывается эффективным и в задачах, в которых существен учет рельефа трассы и влияния теплообмена. Эти исследования выходят за рамки настоящей работы.

Литература

1. *Murvay P. S.*, *Silea I.* A survey on gas leak detection and localization techniques // J. Loss Prev. Process Ind. 2012. Vol. 25. P. 966–973.

2. *Лаптева Т. И.*, *Мансуров М. Н.* Обнаружение утечек при неустановившемся течении в трубах // Нефтегазовое дело. 2006. С. 1–15.

3. *Zhu H.*, *Lin P.*, *Pen Q.* A CFD (computational fluid dynamics) simulation for oil leakage from damaged submarine pipeline // Energy. 2014. Vol. 64. P. 887–899. https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.10.037

4. *Thiberville C.*, *Wang Y.*, *Waltrich P.*, *Williams W.*, *Kam S. I.* Modeling of smart pigging for pipeline leak detection: From mathematical formulation to large-scale application // SPE Gas & Oil Technology Showcase and Conference, 21–23 October, 2019. Dubai, UAE: Society of Petroleum Engineers, 2019. P. 1–27. https://doi.org/10.2118/198648-MS

5. *Бутиков Ю. А.*, *Чура Н. И.*, *Широченский С. И.* Современные дистанционные методы и аппаратура контроля утечек из магистральных трубопроводов. М.: ИРЦ Газпром, 1995. 43 с. (Сер. Автоматизация, телемеханизация и связь с газовой промышленностью.)

6. *Liu A. E.* Overview: Pipeline accounting and leak detection by mass balance, theory and hardware implementation. Los Angeles: Quantum Dynamics Inc., 2008. 15 p.

7. *Васильев О. Ф.*, *Бондарев Э. А.*, *Воеводин А. Ф.*, *Каниболотский М. А.* Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.

8. *Obibuike U. Ju.*, *Ekwueme S. T.*, *Ohia N. P.*, *Igwilo K. Ch.*, *Onyejekwe I. M.*, *Igbojionu A. Ch.* Analytical model for the estimation of leak location in natural gas pipeline // International Journal of Oil, Gas and Coal Engineering. 2019. Vol. 7. N 4. P. 95–102. https://doi.org/10.11648/j.ogce.20190704.12

9. *Fukushima K.*, *Maeshima R.*, *Kinoshita A.*, *Shiraishi H.*, *Koshijima I.* Gas pipeline leak detection system using the online simulation method // Comp. Chem. Engng. 2000. Vol. 24. P. 453–456.

10. *Воеводин А. Ф.*, *Никифоровская В. С.* Численный метод определения места утечки жидкости или газа в трубопроводе // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12. № 1(37). С. 25–30.

11. *Селезнев В. Е.*, *Бойченко А. Л.*, *Прялов С. Н.* Оперативное обнаружение разрывов магистральных газопроводов // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 2. С. 101–112.

12. *Коршунов С.* Идентификация утечек газа. Магистральные газопроводы высокого давления. Саарбрюккен: Lambert Academic Publ., 2014. 218 с.

13. *Курбатова Г. И.*, *Ермолаева Н. Н.*, *Филиппов В. Б.*, *Филиппов К. Б.* Проектирование газопроводов в северных морях. СПб.: Лань, 2020. 352 с.

14. *Курбатова Г. И.*, *Клемешев В. А.* Математический аппарат обнаружения места утечки в газопроводах // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 27–41.

15. *Alarcón-Ramos L. Á.*, *Pérez P. P. G.* A useful application of a simulator for leak events in pipelines // International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering. 2021. Vol. 3. P. 76–84.

16. *Kurbatova G. I.*, *Ermolaeva N. N.* Sensitivity analysis of the gas transmission offshore pipeline model to variations of the model parameters // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 47–61. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.104

17. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5-ти т. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2006. 544 с.

18. *Рид Р.*, *Праусниц Дж.*, *Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей / пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. Л.: Химия, 1982. 592 с. (*Reid R.*, *Prausnitz J.*, *Sherwood T.* The properties of gases and liquids.)

19. *Kurbatova G.*, *Klemeshev V.*, *Philippov V.* Calculation of depressurization coordinate in underground and offshore gas pipelines // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2162. N 012023. P. 1–14. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2162/1/012023

Статья поступила в редакцию 18 марта 2022 г.
Статья принята к печати 5 мая 2022 г.

Контактная информация:

Курбатова Галина Ибрагимовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; g.kurbatova@spbu.ru

Виноградова Екатерина Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.m.vinogradova@spbu.ru

Клемешев Владимир Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.klemeshev@spbu.ru

Analysis of simplified gas transportation models. Calculation of the gas leak location in a pipeline

G. I. Kurbatova, E. M. Vinogradova, V. A. Klemeshev

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kurbatova G. I., Vinogradova E. M., Klemeshev V. A. Analysis of simplified gas transportation models. Calculation of the gas leak location in a pipeline. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 239–252. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.205 (In Russian)

An approach to a simplified calculation of the characteristics of a steady gas flow through a pipeline is proposed. In this approach, the pressure is calculated using an isothermal model; the temperature analysis is reduced to a cubic equation solving. A simple analytical gas leak point coordinate dependence on the pressure and gas flow values is obtained at outlet from the pipeline. The result of comparison of calculations for the general and simplified models of gas flow in pipelines is presented. A criterion has been determined for the fulfillment of which it is permissible to use a simplified approach to calculating the gas characteristics and the leak point coordinates. Using an example of practical interest, the high accuracy of the calculation according to the proposed approach of both pressure and temperature in the flow and the gas leak coordinate in the pipeline is demonstrated.

Keywords: natural gas flow, mathematical model, simplifications, analytical calculation of pressure, temperature, coordinates of the leak.

References

1. Murvay P. S. Silea I. A survey on gas leak detection and localization techniques. *J. Loss Prev. Process Ind.*, 2012, vol. 25, pp. 966–973.

2. Lapteva T. I., Mansurov M. N. Obnaruzhenie utechek pri neustanovivshemsia techenii v trubakh [Transient leak detection flow in pipes]. *Neftegazovoe delo* [*Oil and Gas Affair*], 2006, pp. 1–15. (In Russian)

3. Zhu H., Lin P., Pen Q. A CFD (computational fluid dynamics) simulation for oil leakage from damaged submarine pipeline. *Energy*, 2014, vol. 64, pp. 887–899. https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.10.037

4. Thiberville C., Wang Y., Waltrich P., Williams W., Kam S. I. Modeling of smart pigging for pipeline leak detection: From mathematical formulation to large-scale application. *SPE Gas & Oil Technology Showcase and Conference*, 21–23 October, 2019. Dubai, UAE, Society of Petroleum Engineers Publ., 2019, pp. 1–27. https://doi.org/10.2118/198648-MS

5. Butikov Iu. A., Chura N. I., Shirochenski S. I. *Sovremennye distantsionnye metody i apparatura kontrolia utechek iz magistralnykh truboprovodov* [*Modern remote sensing methods and equipment for monitoring leaks from main pipelines*] Moscow, IRTs Gazprom Publ., 1995, 43 p. (Ser. Avtomatizaciia, telemekhanizaciia i sviaz s gazovoi promyshlennostiu [Series Automatization, telemechanization and bond with gas industry]). (In Russian)

6. Liu A. E. Overview: Pipeline accounting and leak detection by mass balance, theory and hardware implementation. Los Angeles, Quantum Dynamics Inc. Publ., 2008, 15 p.

7. Vasilev O. F., Bondarev E. A., Voevodin A. F., Kanibolotskii M. A. *Neizotermicheskoe techenie gaza v trubakh* [*Non-isothermal gas flow in pipes*]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1978, 128 p. (In Russian)

8. Obibuike U. Ju., Ekwueme S. T., Ohia N. P., Igwilo K. Ch., Onyejekwe I. M., Igbojionu A. Ch. Analytical model for the estimation of leak location in natural gas pipeline. *International Journal of Oil, Gas and Coal Engineering*, 2019, vol. 7, no. 4, pp. 95–102. https://doi.org/10.11648/j.ogce.20190704.12

9. Fukushima K., Maeshima R., Kinoshita A., Shiraishi H., Koshijima I. Gas pipeline leak detection system using the online simulation method. *Comp. Chem. Engng.*, 2000, vol. 24, pp. 453–456.

10. Voevodin A. F., Nikiforovskaya V. S. Chislennyy metod opredeleniya mesta utechki zhidkosti ili gaza v truboprovode [A numerical method for identifying the location of a fluid leak in a pipeline]. *Sibirian Journal Industrial Mathematics*, 2009, vol. 12, no. 1(37), pp. 25–30. (In Russian)

11. Selezniov V. E., Boichenko A. L., Prialov S. N. Operativnoe obnaruzhenie razryvov magistral'nykh

gazoprovodov [Prompt detection of gas pipeline ruptures]. *Matematicheskoe modelirovanie* [*Mathematical modeling*], 2006, vol. 18, no. 2, pp. 101–112. (In Russian)

12. Korshunov S. *Identifikatsiia utechek gaza. Magistral'nye gazoprovody vysokogo davleniia* [*Identification of gas leaks. High pressure main gas pipelines*]. Saarbrücken, Lambert Academic Publ., 2014, 218 p.

13. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N., Filippov V. B., Filippov K. B. *Proektirovanie gazoprovodov v severnykh moriakh* [*Design of gas pipelines in the northern seas*]. St Petersburg, Lan' Publ., 2020, 352 p. (In Russian)

14. Kurbatova G. I., Klemeshev V. A. Matematicheskii apparat obnaruzheniia mesta utechki v gazoprovodakh [Mathematical apparatus for detecting a leak in gas pipelines]. *Matematicheskoe modelirovanie* [*Mathematical modeling*], 2021, vol. 33, no. 8, pp. 27–41. (In Russian)

15. Alarcón-Ramos L. Á., Pérez P. P. G. A useful application of a simulator for leak events in pipelines. *International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering*, 2021, vol. 3, pp. 76–84.

16. Kurbatova G. I., Ermolaeva N. N. Sensitivity analysis of the gas transmission offshore pipeline model to variations of the model parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 1, pp. 47–61. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.104

17. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki.* V 5 t. T. 2. *Termodinamika i molekuliarnaia fizika* [*General course of physics.* In 5 vol. Vol. 2. *Thermodynamics and molecular physics*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 544 p. (In Russian)

18. Reid R., Prausnitz J., Sherwood T. *The properties of gases and liquids.* New York, McGraw-Hill Inc. Publ., 1977, 548 p. (Rus. ed.: Reid R., Prausnitz J., Sherwood T. *Svoystva gazov i zhidkostey.* Leningrad, Chemistry Publ., 1982, 592 p.)

19. Kurbatova G., Klemeshev V., Philippov V. Calculation of depressurization coordinate in underground and offshore gas pipelines. *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, vol. 2162, no. 012023, pp. 1–14. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2162/1/012023

Received: March 18, 2022.
Accepted: May 05, 2022.

Authors' information:

Galina I. Kurbatova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; g.kurbatova@spbu.ru

Ekaterina M. Vinogradova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; e.m.vinogradova@spbu.ru

Vladimir A. Klemeshev — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.klemeshev@spbu.ru